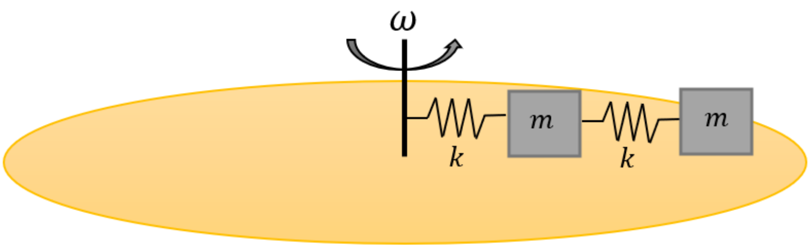
1. MEKANIKA

Dua massa m dan dua pegas dengan konstanta pegas k disusun di atas papan berputar seperti pada gambar berikut. Papan diputar dengan kecepatan sudut konstan $\omega = \omega_0$. Setiap massa mengalami gesekan pada papan yang berbanding lurus dengan kecepatan $f = -\gamma v$, dimana γ adalah suatu konstanta. Massa dan pegas dibuat hanya bisa bergerak pada arah radial. Anggap panjang rileks pegas mendekati nol sehingga dapat diabaikan.



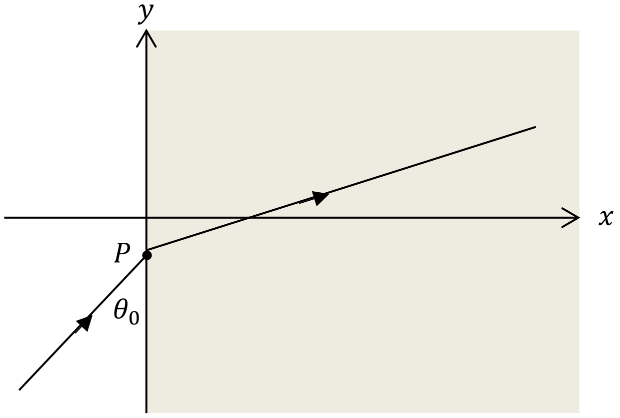
a. Tuliskan persamaan gerak sistem!
b. Apabila posisi tiap massa sebagai fungsi waktu $x_1(t) = A_1 e^{\alpha t}$, $x_2(t) = A_2 e^{\alpha t}$. Tentukan α dalam $\gamma,\ m,\ \omega_0,\ k$ untuk kasus α bernilai real dan imajiner.

Anda boleh menggunakan variabel yang tidak diberikan di soal jika diperlukan. Contoh: Amplitudo A_1, A_2, dan fase ϕ_1, ϕ_2

Wardaya College

2. Optik: Medium Homogen dan Non Homogen

Tinjau sebuah medium homogen yang berada pada $x \geq 0$. Sebuah sinar datang dari udara dan memasuki medium di titik P dengan sudut θ_0 terhadap sumbu y. Lintasan sinar selama merambat dalam medium memenuhi persamaan $y = \alpha x - \beta$, dengan α dan β adalah konstanta positif.



a. Tentukan koordinat titik P!
b. Tentukan indeks bias medium!

Sekarang, tinjau sebuah medium non homogen yang berada pada $-\alpha \leq x \leq \alpha$. Lintasan sebuah sinar yang berada di dalam medium tersebut memenuhi persamaan $x = \alpha \sin \beta y$, dengan α dan β adalah konstanta positif.

c. Jika indeks bias medium hanya bergantung pada x dan diketahui indeks bias medium pada $x = 0$ adalah n_0, tentukan indeks bias medium pada $x = \alpha$!

Wardaya College

3. Listrik Magnet

Suatu sistem mainan listrik terdiri dari kumparan serta sebuah mobil mainan bermesin yang ditempel magnet dan dirancang sedemikian rupa. Permasalahan ini akan ditinjau secara bertahap.

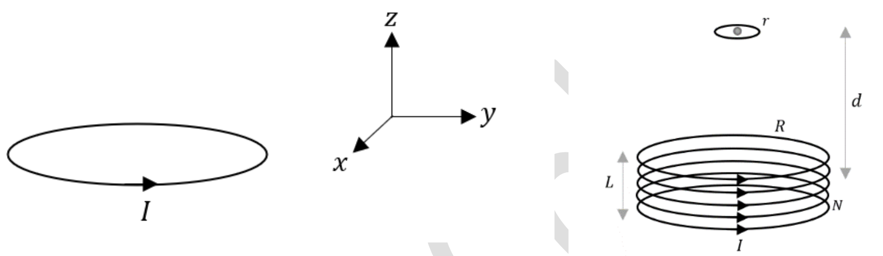
Petunjuk matematika:

$(1+x)^n \approx 1 + nx$ untuk $x \ll 1$

a. Untuk suatu arus i yang mengaliri pada loop yang memiliki vektor luas penampang $\vec{A}$, diketahui bahwa vektor momen dipol magnetik $\vec{\mu}$ adalah

$$\vec{\mu} = i\,\vec{A}$$

Tentukan vektor momen magnet $\vec{\mu}$ untuk suatu loop berbentuk lingkaran dengan jari-jari r membawa arus I dengan arah seperti pada gambar berikut!



b. Perhatikan gambar berikut. Suatu kumparan dengan jari-jari R, jumlah lilitan N, dan panjang L dialiri arus I. Tentukan medan magnet pada suatu titik pada $z = d$ diukur dari pusat koordinat (titik $z = 0$ berada pada pusat kumparan). Buktikan bahwa medan pada titik tersebut adalah

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I N}{2L}\left(\frac{d+\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(d+\frac{L}{2}\right)^2 + R^2}} - \frac{d-\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(d-\frac{L}{2}\right)^2 + R^2}}\right)\hat{z}$$

c. Loop kecil dengan jari-jari r ($r \ll R, d$) diletakkan pada jarak $z = d$. Tentukan fluks magnetik yang menembus loop ini akibat kumparan!

d. Pada bagian ini, gunakan prinsip induksi mutual. Jika terdapat dua sistem listrik yang memiliki arus I_1 dan I_2, dan ϕ_{12} adalah fluks pada 1 oleh 2, serta ϕ_{21} adalah fluks pada 2 oleh 1, maka hubungan antar variabel ini adalah

$$\phi_{21} = M\,I_1$$
$$\phi_{12} = M\,I_2$$

dimana M adalah koefisien induksi mutual. Tentukan besar M pada sistem yang diberikan di bagian c!

e. Untuk bagian ini dan selanjutnya, loop arus diganti dengan magnet batang (bisa dianggap sebagai dipol ideal) yang memiliki momen dipol magnet $\mu\,\hat{z}$, tentukan fluks magnetik yang menembus kumparan oleh magnet batang!

4. Termodinamika: Persamaan Clausius-Clapeyron

Suatu cairan menguap pada suhu T_0 dan tekanan udara P_0. Ketika tekanan udara di sekitar cairan berubah, cairan tidak akan menguap pada suhu T_0. Cairan ini memiliki kalor laten L (kalor yang dibutuhkan per satuan massa cairan untuk menguap) dan massa molar μ (massa satu mol cairan). Pada bagian ini akan dituntun cara untuk mendapat persamaan Clausius-Clapeyron untuk penguapan melalui beberapa tahap.

Persamaan termodinamika yang mungkin berguna:

- Hubungan kalor Q, energi dalam U, tekanan P, dan volume V :
$$dQ = dU + P\,dV$$
- Hubungan kalor Q, entropi S, dan suhu T :
$$dQ = T\,dS$$
- Persamaan energi bebas gibbs G dinyatakan dalam energi dalam U, tekanan P, volume V, suhu T, dan entropi S :
$$G = U + PV - TS$$

a. Tentukan massa n mol cairan, nyatakan dalam n dan μ!

b. Tentukan diferensial dari energi gibbs dG , nyatakan dalam V, S, dP, dan dT!

c. Dalam kasus penguapan, dG konstan sehingga $dG_{air} = dG_{gas}$. Jika volume dan entropi cairan adalah V_c dan S_c, sedangkan volume dan entropi gas adalah V_g dan S_g, tentukan hubungan $V_c, V_g, S_c, S_g, dP,$ dan dT!

d. Tinjau kalor n mol cairan yang mengalami penguapan, tentukan hubungan T, S_c, S_g, nyatakan dalam n, μ, L !

e. Anggap $V_g \ll V_c$, dari persamaan yang telah didapat, buktikan persamaan Clausius-Clapeyron berikut!
$$P = P_0 e^{-\frac{\mu L}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)}$$

5. Fisika Modern: Model Atom Bohr A

Model atom Bohr adalah model atom yang berhasil menjelaskan spektrum transisi pada atom hidrogen. Model ini menggambarkan atom sebagai inti kecil yang bermuatan positif dan dikelilingi oleh elektron yang bergerak dalam orbit lingkaran.

a. Panjang gelombang de Broglie dapat dinyatakan dalam $\lambda = h^{\alpha} P^{\beta}$ dengan h adalah konstanta Planck yang bernilai $6{,}626 \times 10^{-34}$ kg m^{2}s^{-1} dan P adalah momentum partikel. Diketahui α dan β adalah konstanta numerik, tuliskan nilai α dan β!

Kuantisasi Bohr dapat dinyatakan sebagai panjang lintasan elektron dalam satu periode orbit selalu merupakan kelipatan bilangan bulat positif dari panjang gelombang elektron. Persamaan kuantisasi Bohr adalah $2\pi r = n\lambda$ dengan r adalah jari-jari orbit, n adalah bilangan bulat positif, dan λ adalah panjang gelombang de Broglie elektron.

Orbit elektron yang berbentuk lingkaran merupakan akibat dari gaya elektrostatik yang bekerja antara elektron dengan inti positif. Elektron dan inti atom hidrogen memiliki besar muatan yang sama, yaitu e. Diketahui massa elektron adalah m.

b. Elektron dapat mengalami transisi dari satu tingkat energi ke tingkat energi lainnya dengan cara menyerap atau melepas foton yang sesuai dengan perbedaan tingkat energinya. Tentukan panjang gelombang dari foton yang terlepas saat elektron bertransisi dari tingkat

Wardaya College

energi kedua (E_2) ke tingkat energi dasar (E_1)! Nyatakan jawaban dalam E_1, E_2, h (konstanta Planck), dan c (cepat rambat cahaya)!

Model atom Bohr juga dapat diaplikasikan ke molekul lainnya yang memiliki 1 elektron dan beberapa proton seperti ion He^{+} dan Li^{2+}.

c. Tentukan jari-jari orbit pada keadaan stasioner tingkat ke-n untuk ion He^{+} $\left(r_{n,\mathrm{He}^{+}}\right)$ dan Li^{2+} $\left(r_{n,\mathrm{Li}^{2+}}\right)$ dinyatakan dalam jari-jari orbit pada keadaan stasioner tingkat ke-n untuk atom hidrogen ($r_{n,\mathrm{H}}$)!

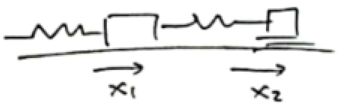
d. Tentukan energi pada keadaan stasioner tingkat ke-n untuk ion He^{+} $\left(E_{n,\mathrm{He}^{+}}\right)$ dan Li^{2+} $\left(E_{n,\mathrm{Li}^{2+}}\right)$ dinyatakan dalam energi pada keadaan stasioner tingkat ke-n untuk atom hidrogen ($E_{n,\mathrm{H}}$)!

Petunjuk: Atom He memiliki 2 proton dan 2 elektron, atom Li memiliki 3 proton dan 3 elektron.

Pembahasan

1. Mekanika:

a)



$$-\gamma\dot{x}_1 + k(x_2-x_1) = m(\ddot{x}_1 - \omega_0^2 x_1)$$
$$-\gamma\dot{x}_2 - k(x_2-x_1) = m(\ddot{x}_2 - \omega_0^2(x_1+x_2))$$

b) $x_1 = A_1 e^{\alpha t}$, $x_2 = A_2 e^{\alpha t}$

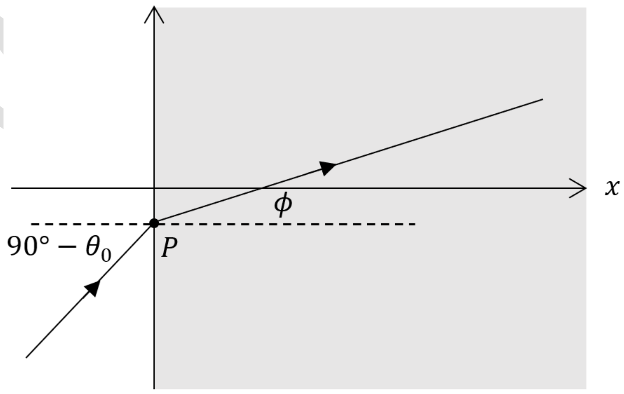
$$-\gamma\alpha A_1 e^{\alpha t} + k(A_2-A_1)e^{\alpha t} = m(\alpha^2 A_1 - \omega_0^2 A_1)e^{\alpha t}$$
$$kA_2 = (m\alpha^2 - m\omega_0^2 + \gamma\alpha + k)A_1 \quad \text{--(1)}$$
$$-\gamma\alpha A_2 e^{\alpha t} - k(A_2-A_1)e^{\alpha t} = m(\alpha^2 A_2 - \omega_0^2(A_1+A_2))e^{\alpha t}$$
$$(k+m\omega_0^2)A_1 = (\gamma\alpha + k + m\alpha^2 - m\omega_0^2)A_2 \quad \text{--(2)}$$

(1) → (2) ⇒ $$k(k+m\omega_0^2) = (\gamma\alpha + k + m\alpha^2 - m\omega_0^2)^2$$
$$\pm\sqrt{k(k+m\omega_0^2)} = \gamma\alpha + k + m\alpha^2 - m\omega_0^2$$
$$m\alpha^2 + \gamma\alpha + k - m\omega_0^2 \pm \sqrt{k(k+m\omega_0^2)} = 0$$
$$\alpha = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4m\left(k - m\omega_0^2 \pm \sqrt{k(k+m\omega_0^2)}\right)}}{2m}$$

2. Optik: Medium Homogen dan Non-homogen

a. Titik P terletak pada garis $y = \alpha x - \beta$ dan berpotongan dengan sumbu y. Jadi, $x_P = 0$ dan $y_P = \alpha(0) - \beta = -\beta$. Koordinat titik P adalah $(0, -\beta)$.

b. Sudut datang sinar adalah $90° - \theta_0$ dan misalkan sudut biasnya ϕ.



Gradien garis lintasan sinar dapat dinyatakan sebagai $\tan\phi$, sehingga didapatkan $\tan\phi = \alpha$. Misalkan indeks bias medium n, persamaan Hukum Snellius dapat ditulis seperti berikut ini.

$$\sin(90° - \theta_0) = n \sin\phi$$
$$\cos\theta_0 = n\sin\phi \qquad (1)$$

Dengan memasukkan besar $\sin\phi = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, didapatkan indeks bias medium.

$$n = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}\cos\theta_0 \tag{2}$$

c. Persamaan Hukum Snellius dapat ditulis seperti berikut ini.

$$n(x)\sin\theta = C \tag{3}$$

dengan $\tan\theta = \frac{dy}{dx}$ dan C adalah sebuah konstanta.

Ekspresi untuk $\frac{dx}{dy}$ bisa didapatkan dengan menurunkan persamaan $x(y)$.

$$\frac{dx}{dy} = \alpha\beta\cos\beta y \tag{4}$$

$$\cos\beta y = \sqrt{1-\sin^2\beta y}$$

$$\cos\beta y = \sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}} \tag{5}$$

Dari persamaan (3), (4), dan (5) didapatkan

$$\frac{n(x)}{\sqrt{1+\alpha^2\beta^2\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)}} = C \tag{6}$$

Diketahui $n(0) = n_0$, sehingga

$$C = \frac{n_0}{\sqrt{1+\alpha^2\beta^2}} \tag{7}$$

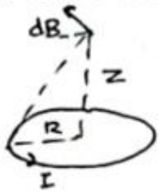
Substitusi kembali persamaan (7) ke (6) dan masukkan $x = \alpha$.

$$n(\alpha) = \frac{n_0}{\sqrt{1+\alpha^2\beta^2}} \tag{8}$$

3. Listrik Magnet:

a) $\mu = I . \pi r^2 \quad \hat{z}$

b) Medan oleh kawat tipis (Biot - Savart)

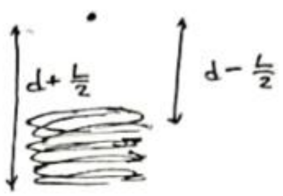


$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{dl}{R^2+z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}\;\hat{z}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{2\pi R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}\;\hat{z}$$

Medan oleh kumparan



$$B = \int \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}\,\frac{N}{L}\,dz$$

$$z \equiv R\tan\alpha$$

$$B = \int \frac{\mu_0 I R^2}{2R^3\sec^3\alpha}\,\frac{N}{L}\cdot R\sec^2\alpha\,d\alpha$$

$$= \frac{\mu_0 I N}{2L}\sin\alpha$$

$$= \frac{\mu_0 I N}{2L}\left[\frac{d+\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2+(d+\frac{L}{2})^2}} - \frac{d-\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2+(d-\frac{L}{2})^2}}\right]$$

c) $\phi_{loop} = B.\pi r^2$

$$= \frac{\mu_0 I \pi r^2 N}{2L}\left[\frac{d+\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2+(d+\frac{L}{2})^2}} - \frac{d-\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2+(d-\frac{L}{2})^2}}\right]$$

d) $M = \frac{\phi_{loop}}{I_{kumparan}} = \frac{\mu_0 \pi r^2 N}{2L}\left[\frac{d+\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2+(d+\frac{L}{2})^2}} - \frac{d-\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2+(d-\frac{L}{2})^2}}\right]$

e) $\phi_{kumparan} = M.I_{loop}$

$$= \frac{\mu_0 I_{loop} \pi r^2 N}{2L}\left[\frac{d+\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2+(d+\frac{L}{2})^2}} - \frac{d-\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2+(d-\frac{L}{2})^2}}\right]$$

Dari (a), $I_{loop}.\pi r^2 = \mu$

$$\phi_{kumparan} = \frac{\mu_0 \mu N}{2L}\left[\frac{d+\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2+(d+\frac{L}{2})^2}} - \frac{d-\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2+(d-\frac{L}{2})^2}}\right]$$

4. Termodinamika: Persamaan Clausius-Clapeyron

A.1. $m = n\mu$

A.2. $G = U + PV - TS$

$$dG = \underbrace{dU + P.dV}_{dQ} + V.dP - \underbrace{T.dS}_{dQ} - S.dT$$

$$= V.dP - S.dT$$

A.3. $dG_{gas} = dG_{cairan}$

$$V_g.dP - S_g.dT = V_c.dP - S_c.dT$$

$$(V_g - V_c)\,dP = (S_g - S_c)\,dT$$

A.4. $T(S_g - S_c) = m.L$

$$= n\mu L$$

$$S_g - S_c = \frac{n\mu L}{T}$$

A.5. Gas ideal $\rightarrow PV_g = nRT$

$$V_g = \frac{nRT}{P}$$

A3 $\rightarrow$ $V_g.dP = (S_g - S_c)\,dT$

$$nR\int_{P_0}^{P}\frac{dP}{P} = n\mu L\int_{T_0}^{T}\frac{dT}{T^2}$$

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \frac{\mu L}{R}.\left[-\frac{1}{T}+\frac{1}{T_0}\right]$$

$$P = P_0\, e^{-\frac{\mu L}{R}\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)}$$

5. Fisika Modern: Model Atom Bohr

a. Panjang gelombang de Broglie memenuhi persamaan berikut.

$$\lambda = \frac{h}{P} \tag{1}$$

Maka, $\alpha = 1$ dan $\beta = -1$.

Sebagai alternatif, analisis dimensi bisa digunakan untuk menjawab subsoal ini.

Dimensi λ: $[L]$, dimensi h: $[M][L]^2[T]^{-1}$, dimensi P: $[M][L][T]^{-1}$.

$$[L] = ([M][L]^2[T]^{-1})^\alpha([M][L][T]^{-1})^\beta$$

Dimensi di ruas kiri harus sama dengan dimensi di ruas kanan, sehingga didapatkan dua persamaan berikut.

$$1 = 2\alpha + \beta$$
$$0 = \alpha + \beta$$

Penyelesaian dari kedua persamaan tersebut adalah $\alpha = 1$ dan $\beta = -1$.

b. Energi foton yang terlepas diberikan oleh persamaan berikut ini.

$$E_{21} = E_2 - E_1 = \frac{hc}{\lambda_{21}}$$

Maka, panjang gelombang foton yang terlepas adalah

$$\lambda_{21} = \frac{hc}{E_2 - E_1} \tag{2}$$

c. Dengan mensubstitusikan λ ke persamaan kuantisasi Bohr, didapatkan

$$2\pi r = \frac{nh}{P}$$
$$r = \frac{nh}{2\pi mv} \tag{3}$$

Misalkan total muatan proton adalah $+Ze$. Persamaan gaya pada elektron adalah sebagai berikut.

$$\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 {r_n}^2} = \frac{m{v_n}^2}{r_n} \tag{4}$$

Dari persamaan (3) dan (4), didapatkan

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m Z e^2} n^2 \tag{5}$$

Untuk atom hidrogen, $Z = 1$, sedangkan untuk ion He^+, $Z = 2$, sehingga $r_{n,\mathrm{He}^+} = \frac{1}{2} r_{n,\mathrm{H}}$.

Untuk atom hidrogen, $Z = 1$, sedangkan untuk ion Li^{2+}, $Z = 3$, sehingga $r_{n,\mathrm{Li}^{2+}} = \frac{1}{3} r_{n,\mathrm{H}}$.

d. Energi total pada keadaan stasioner tingkat ke-n adalah sebagai berikut

$$E_n = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} + \frac{1}{2} m{v_n}^2 \tag{6}$$

Substitusi persamaan (3) ke persamaan (6), maka didapatkan

$$E_n = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} + \frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n}$$
$$E_n = -\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} \tag{7}$$

Substitusi persamaan (5) ke persamaan (7), maka didapatkan

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{8{\varepsilon_0}^2h^2}\frac{1}{n^2} \tag{8}$$

Untuk atom hidrogen, $Z = 1$, sedangkan untuk ion He^+, $Z = 2$, sehingga $E_{n,\mathrm{He}^+} = 4E_{n,\mathrm{H}}$.

Untuk atom hidrogen, $Z = 1$, sedangkan untuk ion Li^{2+}, $Z = 3$, sehingga $E_{n,\mathrm{Li}^{2+}} = 9E_{n,\mathrm{H}}$.

Wardaya College