Soal Final IRC 2022 - Fisika
Paket B

Departemen Fisika
2022

1. MEKANIKA: Kecepatan Minimal atau Maksimal?

Terdapat sebuah bukit yang memenuhi persamaan $y(x)$ dan $y \geq 0$. Sebuah bola yang ditembakkan dengan kecepatan awal tertentu akan melewati lintasan pada bukit yang berawal di $x = x_P$ dan berakhir di $x = x_Q$. Titik P dan Q terletak pada persamaan $y(x)$. Anda akan menentukan rentang kecepatan awal bola sehingga bola dapat pergi dari P ke Q tanpa meninggalkan lintasan tersebut.

Tentukan rentang kecepatan awal bola yang valid jika

a. $y(x) = -m|x| + c$, dengan m dan c adalah konstanta positif, $x_P = -\frac{c}{m}$, $x_Q = \frac{c}{m}$, dan permukaan bukit licin!
b. $y(x) = -m|x| + c$, dengan m dan c adalah konstanta positif, $x_P = -\frac{c}{m}$, $x_Q = \frac{c}{m}$, dan permukaan bukit kasar dengan koefisien gesek μ $(\mu < m)$!
c. $y(x) = a - bx^2$, dengan a dan b adalah konstanta positif, $x_P = -\sqrt{\frac{a}{b}}$, $x_Q = \sqrt{\frac{a}{b}}$, dan permukaan bukit licin!
d. $y(x) = 1 - x^2$, $x_P = -1$, $x_Q = 1$, dan permukaan bukit kasar dengan koefisien gesek μ! Abaikan efek gravitasi untuk subsoal ini dan anggap bola dipaksa untuk mengikuti lintasan $y(x)$.

Petunjuk:

$|x|$ adalah nilai mutlak dari x, atau dengan kata lain $|x| = x$ untuk $x \geq 0$ dan $|x| = -x$ untuk $x < 0$.

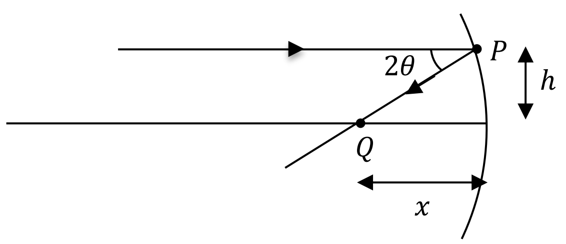
$$\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)$$

Ekspresi radius kelengkungan persamaan $y(x)$ di titik x diberikan oleh persamaan berikut ini.

$$R = \frac{\left[1 + \left(y'(x)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{|y''(x)|}$$

2. Optik: Sinar dan Cermin

Seberkas sinar datang sejajar sumbu utama dan mengenai sebuah cermin cekung dengan jari-jari kelengkungan R di titik P. Jarak titik P ke sumbu utama adalah h. Kemudian sinar memantul dan memotong sumbu utama di titik Q yang berjarak x dari cermin. Sudut yang dibentuk oleh sinar datang dan sinar pantul dinyatakan sebagai 2θ.



a. Nilai h dan x masing-masing dapat dinyatakan dalam kedua persamaan berikut ini.

$$\frac{h}{R} = a \sin b\theta$$
$$\frac{x}{R} = c + d \sec\theta$$
dengan a, b, c, d adalah konstanta numerik. Tentukan nilai a, b, c, d!

b. Tentukan besar h untuk $x = \frac{12}{25}R$!
c. Sekarang tinjau kondisi $h \ll R$. Besar x dapat dinyatakan dalam ekspansi berikut ini.

$$x_{(h)} = x_0 + x_1 h + x_2 h^2 + \cdots$$
Nyatakan koefisien x_0, x_1, dan x_2 dalam R!

d. Untuk subsoal ini, abaikan orde h^2 dan yang lebih tinggi. Seluruh sinar datang yang sejajar sumbu utama akan terfokus pada suatu titik. Tentukan posisi titik tersebut!

Petunjuk:

$$(1+x)^n \approx 1 + nx, |x| \ll 1$$

3. Listrik Magnet

Dua buah kumparan dirangkai seperti pada gambar berikut. Kumparan kecil dengan jumlah lilitan N_1, luas penampang A_1, panjang d_1, dan induktansi diri L_1 dimasukkan ke tengah kumparan besar yang memiliki jumlah lilitan N_2, luas penampang A_2, panjang d_2, serta induktansi diri L_2. Kumparan besar dihubungkan ke sumber listrik AC dengan tegangan sebagai fungsi waktu $V = V_0 \sin \omega t$, sedangkan kumparan kecil dihubungkan ke sebuah resistor dengan hambatan R dan kapasitor dengan kapasitansi C.

a. Jika terdapat arus I yang mengalir di kumparan besar, tentukan medan magnet di tengah kumparan besar, anggap d_2 sangat panjang dan $N_2 \gg 1$!
b. Tentukan fluks magnetik oleh kumparan besar yang menembus kumparan kecil!
c. Pada bagian ini, gunakan prinsip induksi mutual. Jika terdapat dua sistem listrik yang memiliki arus I_1 dan I_2, dan ϕ_{12} adalah fluks pada 1 oleh 2, serta ϕ_{21} adalah fluks pada 2 oleh 1, maka hubungan antar variabel ini adalah

$$\phi_{21} = M\, I_1$$
$$\phi_{12} = M\, I_2$$
dimana M adalah koefisien induksi mutual. Tentukan besar M pada sistem ini!

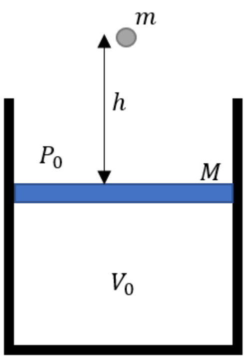
d. Jika terdapat arus i yang mengalir di kumparan kecil, Tentukan fluks magnetik oleh kumparan kecil pada kumparan besar!
e. Tuliskan persamaan kirchoff untuk kedua kumparan!

4. Termodinamika:

Suatu piston bermassa M dan luas penampang A diletakkan di atas ruangan berisi gas dengan konstanta laplace γ seperti pada gambar berikut. Sistem ini kemudian dibiarkan hingga mencapai kesetimbangan, dan ruangan ini bervolume V_0 dalam keadaaan setimbang. Kemudian, bola bermassa m dijatuhkan dari ketinggian h dan menumbuk piston dengan tumbukan bersifat lenting sempurna. Ruangan dan piston bersifat isolator sempurna. Anggap $m \ll M$ sehingga anda cukup meninjau sampai orde $\frac{m}{M}$ saja. Asumsikan volume V_0 sangat besar sehingga perubahan volume akibat pergerakan piston jauh lebih kecil dari V_0 (tinjau sampai orde pertama). Percepatan gravitasi adalah g dan tekanan atmosfer adalah P_0.

a. Saat piston dalam kondisi kesetimbangan, tentukan tekanan gas dalam ruangan!

b. Tentukan kecepatan piston dan bola setelah tumbukan yang pertama kali!
c. Apa gerakan piston berikutnya? Tuliskan persamaan gerak dan tentukan posisi piston sebagai fungsi waktu $x(t)$ relatif terhadap posisi awal piston!
d. Tentukan h sehingga saat tumbukan kedua terjadi, piston berada di posisi awal!



5. Fisika Modern: Model Atom Bohr B

Model atom Bohr adalah model atom yang berhasil menjelaskan spektrum transisi pada atom hidrogen. Model ini menggambarkan atom sebagai inti kecil yang bermuatan positif dan dikelilingi oleh elektron yang bergerak dalam orbit lingkaran.

a. Panjang gelombang de Broglie dapat dinyatakan dalam $\lambda = h^\alpha P^\beta$ dengan h adalah konstanta Planck yang bernilai $6{,}626 \times 10^{-34}$ kg m^{2}s^{-1} dan P adalah momentum partikel. Diketahui α dan β adalah konstanta numerik, tuliskan nilai α dan β!

Kuantisasi Bohr dapat dinyatakan sebagai panjang lintasan elektron dalam satu periode orbit selalu merupakan kelipatan bilangan bulat positif dari panjang gelombang elektron. Persamaan kuantisasi Bohr adalah $2\pi r = n\lambda$ dengan r adalah jari-jari orbit, n adalah bilangan bulat positif, dan λ adalah panjang gelombang de Broglie elektron.

b. Tentukan hubungan antara kecepatan elektron (v) dengan jari-jari orbit (r)!

Orbit elektron yang berbentuk lingkaran merupakan akibat dari gaya elektrostatik yang bekerja antara elektron dengan inti positif. Elektron dan inti atom hidrogen memiliki besar muatan yang sama, yaitu e. Diketahui massa elektron adalah m.

c. Dengan meninjau gaya yang bekerja pada elektron, tentukan jari-jari orbit pada keadaan stasioner tingkat ke-n (r_n)!

Energi total dapat dinyatakan sebagai penjumlahan energi potensial elektrostatik dan energi kinetik elektron.

d. Tentukan energi pada keadaan stasioner tingkat ke-n (E_n)!

Pembahasan

1. Mekanika:

a. Puncak bukit terletak pada koordinat $(0, c)$. Misalkan massa bola M dan kecepatan bola di puncak bukit v'. Energi terkonservasi sehingga berlaku persamaan berikut ini.

$$\frac{1}{2}Mv^2 = Mgc + \frac{1}{2}Mv'^2$$
$$v = \sqrt{2gc + v'^2}$$
$$v \geq \sqrt{2gc} \qquad (1)$$

b. Usaha oleh gaya gesek sepanjang lintasan menaiki bukit perlu dicari terlebih dahulu, kemudian tuliskan persamaan energinya. Apabila θ adalah sudut kemiringan bukit, panjang lintasan yang ditempuh bola selama menaiki bukit adalah $L = c \csc \theta$.
Usaha yang dikerjakan oleh gaya gesek sebesar

$$W = \mu Mg \cos\theta\, L$$
$$W = \mu Mg\, c \cot\theta$$
$$W = \frac{\mu Mgc}{m} \qquad (2)$$

Persamaan hukum kekekalan energi adalah sebagai berikut.

$$\frac{1}{2}Mv^2 = Mgc + \frac{\mu Mgc}{m} + \frac{1}{2}mv'^2$$
$$v = \sqrt{2gc\left(1 + \frac{\mu}{m}\right) + v'^2}$$
$$v \geq \sqrt{2gc\left(1 + \frac{\mu}{m}\right)} \qquad (3)$$

c. Puncak bukit terletak pada koordinat $(0, a)$. Dengan cara yang sama dengan subsoal a, didapatkan rentang kecepatan bola untuk bisa sampai ke puncak bukit adalah

$$v \geq \sqrt{2ga} \qquad (4)$$

Namun, supaya bola tidak pernah meninggalkan lintasan, kecepatan bola tidak boleh melebihi batas tertentu. Kecepatan batas ini bisa dicari dengan menggunakan syarat gaya normal N harus bernilai positif. Tinjau gaya yang bekerja pada bola.

$$Mg\cos\theta - N = \frac{Mu^2}{R} \qquad (5)$$

dengan u adalah kecepatan bola di ketinggian y dan R adalah radius kelengkungan bukit di ketinggian y.
Dari persamaan konservasi energi, didapatkan

$$u^2 = v^2 - 2gy \qquad (6)$$

Jari-jari kelengkungan bukit di ketinggian y dapat dicari dengan bantuan petunjuk pada soal.

$$R = \frac{\left[1 + \left(y'(x)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{|y''(x)|}$$
$$R = \frac{(1 + 4b^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{2b} \qquad (7)$$
$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + 4b^2x^2}} \qquad (8)$$

Substitusi persamaan (6), (7), dan (8) ke persamaan (5).

$$\frac{Mg}{\sqrt{1 + 4b^2x^2}} - N = \frac{2bM(v^2 - 2gy)}{(1 + 4b^2x^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (9)$$

Dengan menggunakan syarat $N > 0$, didapatkan

$$\frac{Mg}{\sqrt{1 + 4b^2x^2}} - \frac{2bM(v^2 - 2gy)}{(1 + 4b^2x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$
$$g(1 + 4b^2x^2) - 2b(v^2 - 2gy) > 0$$

$$v^2 < 2gy + \frac{1}{2b}g(1+4b^2x^2)$$
$$v^2 < 2g(a-bx^2) + \frac{g}{2b} + 2gbx^2$$
$$v < \sqrt{2ga + \frac{g}{2b}} \tag{10}$$

Menggabungkan syarat persamaan (4) dan (10), didapatkan

$$\sqrt{2ga} \leq v < \sqrt{2ga + \frac{g}{2b}} \tag{11}$$

d. Efek gravitasi diabaikan, sehingga energi kinetik awal bola harus setidaknya sama dengan usaha yang dikerjakan oleh gaya gesek sepanjang lintasan bola. Panjang lintasan bola adalah

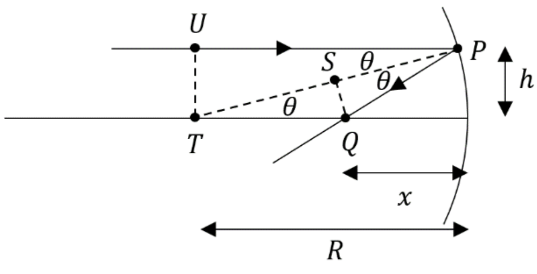
$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$$
$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+4x^2}\, dx$$
$$L = 2\int_{0}^{1} \sqrt{1+4x^2}\, dx$$
$$L = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right) \tag{12}$$

Persamaan hukum kekekalan energi adalah sebagai berikut.

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \mu MgL + \frac{1}{2}Mv'^2$$
$$v = \sqrt{2\mu g\left(\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right) + v'^2}$$
$$v \geq \sqrt{\mu g\left(2\sqrt{5} + \ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)} \tag{13}$$

2. Optik: Sinar dan Cermin

a. Perhatikan gambar berikut ini!



Lihat segitiga PUT. Panjang $UT = h$ dan $PT = R$, sehingga didapatkan persamaan berikut.

$$h = R\sin\theta \tag{1}$$

Lihat segitiga TSQ. Panjang $TS = \frac{1}{2}R$ dan $TQ = R - x$, sehingga didapatkan persamaan berikut.

$$\cos\theta = \frac{\frac{1}{2}R}{R-x}$$
$$R - x = \frac{1}{2}R\sec\theta$$
$$x = R\left(1 - \frac{1}{2}\sec\theta\right) \tag{2}$$

Jadi, $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = -\frac{1}{2}$.

b. Dari persamaan (1) dan (2), didapatkan

$$x = R\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{h^2}{R^2}}}\right) \qquad (3)$$

Dengan memasukkan nilai $x = \frac{12}{25}R$, didapatkan $h = \frac{\sqrt{51}}{26}R$.

c. Persamaan 3 bisa ditulis ulang menjadi

$$x = R\left(1 - \frac{1}{2}\left(1-\frac{h^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Dengan aproksimasi $h \ll R$, didapatkan

$$x \approx R\left(1 - \frac{1}{2}\left(1+\frac{h^2}{2R^2}\right)\right)$$

$$x \approx \frac{1}{2}R - \frac{h^2}{4R} \qquad (4)$$

Jadi, $x_0 = \frac{1}{2}R$, $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{4R}$.

d. Dengan mengabaikan orde h^2 dan yang lebih tinggi, $x \approx \frac{1}{2}R$. Artinya, semua sinar datang yang sejajar sumbu utama akan terfokus pada titik yang berada di sumbu utama dan berjarak $\frac{1}{2}R$ dari cermin.

3. Listrik Magnet:

a) $B = \frac{\mu_0 I N_2}{d_2}$

b) $\phi_{12} = \frac{\mu_0 I_2 N_2}{d_2} . A_1 . N_1$

$= \frac{\mu_0 A_1 N_1 N_2}{d_2} I_2$

c) $M = \frac{\phi_{12}}{I_2}$

$= \frac{\mu_0 A_1 N_1 N_2}{d_2}$

d) $\phi_{21} = M I_1$

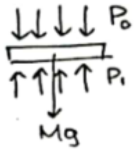
$= \frac{\mu_0 A_1 N_1 N_2}{d_2} I_1$

e) $V_0 \sin(\omega t) = L_2 \frac{dI}{dt} - M \frac{di}{dt}$ ...(1)

$0 = L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{dI}{dt} + iR + \frac{q}{C}$ ...(2)

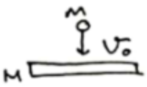
4. Termodinamika:

a)



$$P_1 A = P_0 A + Mg$$
$$P_1 = P_0 + \frac{Mg}{A}$$

b)



$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

$$1 = \frac{v_M - v_m}{v_0}$$

$$m v_0 = m v_m + M v_M$$
$$m v_0 = m v_M - m v_m \quad +$$

$$v_M = \frac{2m}{m+M} v_0 \approx \frac{2m}{M} v_0$$

$$v_m = -\frac{M-m}{M+m} v_0 \approx -\left(1-\frac{m}{M}\right)\left(1+\frac{m}{M}\right)^{-1} v_0$$

$$1-\frac{m}{M}$$

$$v_M = \frac{2m}{M}\sqrt{2gh}$$
$$v_m = \left(1-\frac{2m}{M}\right)\sqrt{2gh}$$

c)

$$P_1 V_0^{\gamma} = P\,(V_0 - Ax)^{\gamma} \rightarrow \text{Adiabatik}$$

$$P = P_1 \frac{V_0^{\gamma}}{(V_0-Ax)^{\gamma}} = P_1\left(1-\frac{Ax}{V_0}\right)^{-\gamma} \approx P_1\left(1+\frac{\gamma A x}{V_0}\right)$$

$$\Sigma F = M\ddot{x}$$
$$P_0 A + Mg - P_1 A = M\ddot{x}$$
$$P_0 A + Mg - (P_0 A + Mg)\left(1+\frac{\gamma A}{V_0}x\right) = M\ddot{x}$$
$$-\frac{\gamma A}{M V_0}(P_0 A + Mg)\,x = \ddot{x} \longrightarrow \boxed{\text{Osilasi}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma A}{M V_0}(P_0 A + Mg)}$$

$$x = A\sin(\omega t)$$
$$\hookrightarrow v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t)$$
$$t = 0 \rightarrow v = A\omega = \frac{2m}{M}\sqrt{2gh}$$
$$A = \frac{2m}{M\omega}\sqrt{2gh}$$

$$x = \frac{2m}{M}\sqrt{\frac{2MghV_0}{\gamma A(P_0 A + Mg)}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{\gamma A}{M V_0}(P_0 A + Mg)}\;t\right)$$

d)

$$\frac{v_m}{g} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(1-\frac{2m}{M}\right) = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\frac{2h}{g} = \frac{4\pi^2/\omega^2}{\left(1-\frac{2m}{M}\right)^2}$$

$$h = \frac{2\pi^2}{g\omega^2}\left(1+\frac{4m}{M}\right)$$

$$h = \frac{2\pi^2 M V_0}{g\gamma A(P_0 A + Mg)}\left(1+\frac{4m}{M}\right) //$$

5. Fisika Modern: Model Atom Bohr

a. Panjang gelombang de Broglie memenuhi persamaan berikut.

$$\lambda = \frac{h}{P} \tag{1}$$

Maka, $\alpha = 1$ dan $\beta = -1$.
Sebagai alternatif, analisis dimensi bisa digunakan untuk menjawab subsoal ini.
Dimensi λ: $[L]$, dimensi h: $[M][L]^2[T]^{-1}$, dimensi P: $[M][L][T]^{-1}$.

$$[L] = ([M][L]^2[T]^{-1})^{\alpha}([M][L][T]^{-1})^{\beta}$$

Dimensi di ruas kiri harus sama dengan dimensi di ruas kanan, sehingga didapatkan dua persamaan berikut.

$$1 = 2\alpha + \beta$$
$$0 = \alpha + \beta$$

Penyelesaian dari kedua persamaan tersebut adalah $\alpha = 1$ dan $\beta = -1$.

b. Dengan mensubstitusikan λ ke persamaan kuantisasi Bohr, didapatkan

$$2\pi r = \frac{nh}{P}$$
$$r = \frac{nh}{2\pi mv} \tag{2}$$

c. Persamaan gaya pada elektron adalah sebagai berikut.

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 {r_n}^2} = \frac{m{v_n}^2}{r_n} \tag{3}$$

Dari persamaan (2) dan (3), didapatkan

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2 \tag{4}$$

d. Energi total pada keadaan stasioner tingkat ke-n adalah sebagai berikut.

$$E_n = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} + \frac{1}{2} m{v_n}^2 \tag{5}$$

Substitusi persamaan (2) ke persamaan (5), maka didapatkan

$$E_n = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} + \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n}$$
$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} \tag{6}$$

Substitusi persamaan (4) ke persamaan (6), maka didapatkan

$$E_n = -\frac{me^4}{8{\varepsilon_0}^2 h^2} \frac{1}{n^2} \tag{7}$$