1. Efusi adalah suatu peristiwa di mana gas melewati suatu celah kecil yang diameternya jauh lebih kecil dibandingkan dengan lintasan bebas rata-rata molekulnya. Laju efusi (ϕ) yang didefinisikan sebagai jumlah molekul yang melewati celah per satuan luas per satuan waktu bergantung pada perbedaan tekanan (P), massa gas (m), konstanta Boltzmann (k_B), dan temperatur (T). Tentukan persamaan laju efusi yang tepat jika diketahui konstanta kesebandingannya adalah $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$!

   a. $\phi = \frac{P}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$

   b. $\phi = P\sqrt{\frac{mk_BT}{2\pi}}$

   c. $\phi = \sqrt{\frac{Pk_BT}{2\pi m}}$

   d. $\phi = \sqrt{\frac{Pmk_BT}{2\pi}}$

   e. $\phi = \sqrt{\frac{Pm}{2\pi k_B T}}$

   Jawaban: A. $\phi = \frac{P}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$

   Dimensi masing-masing besaran adalah $\phi = [L]^{-2}[T]^{-1}$, $P = [M][L]^{-1}[T]^{-2}$, $m = [M]$, $k_B = [M][L]^2[T]^{-2}[\theta]^{-1}$, $T = [\theta]$.

$$\phi = P^\alpha m^\beta {k_B}^\gamma T^\delta$$

$$[L]^{-2}[T]^{-1} = [M]^{\alpha+\beta+\gamma}[L]^{-\alpha+2\gamma}[T]^{-2\alpha-2\gamma}[\theta]^{-\gamma+\delta}$$

   Dimensi ruas kiri harus sama dengan dimensi ruas kanan, sehingga didapatkan 4 persamaan berikut ini.

$$-2 = -\alpha + 2\gamma$$

$$0 = \alpha + \beta + \gamma$$

$$-1 = -2\alpha - 2\gamma$$

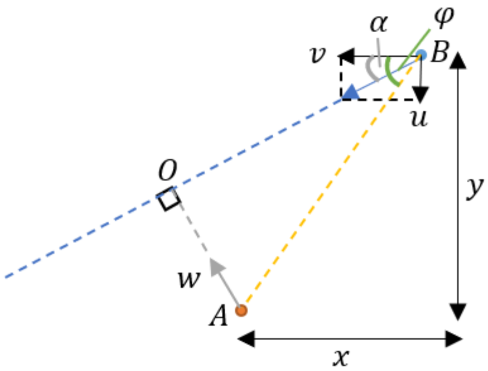
$$0 = -\gamma + \delta$$

   Dari keempat persamaan tersebut, didapatkan $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $\gamma = -\frac{1}{2}$, dan $\delta = -\frac{1}{2}$. Jadi, persamaan laju efusi yang tepat adalah $\phi = \frac{P}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$.

2. Mobil A dan B sedang bergerak di bidang xy, dimana mobil A terletak di titik (0,0) dan bergerak dengan kecepatan $v\,\hat{x}$, sedangkan mobil B terletak di titik (x,y) dan bergerak dengan kecepatan $u\,(-\hat{y})$. Jika mobil A ingin melempar bola hingga mengenai mobil B, berapakah kecepatan minimum bola terhadap mobil A yang dibutuhkan?

a. $\frac{vy-ux}{vx+uy}(u+v)$
b. $\frac{vy-ux}{vx+uy}(u-v)$
c. $\frac{vy-ux}{vx+uy}\sqrt{u^2+v^2}$
d. $\frac{uy-vx}{ux+vy}(u+v)$
e. $\frac{uy-vx}{ux+vy}\sqrt{u^2+v^2}$

Jawaban: C ($\frac{vy-ux}{vx+uy}\sqrt{u^2+v^2}$)



Dalam kerangka mobil A:

Agar kecepatan bola minimum, bola harus dilempar tegak lurus dengan lintasan B dan bertumbukan di titik O.

$$\tan\alpha = \frac{u}{v}$$
$$\tan\varphi = \frac{y}{x}$$

Kecepatan B menurut A

$$v_r = \sqrt{u^2+v^2}$$

Waktu yang dibutuhkan B untuk mencapai O

$$t = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{u^2+v^2}}\cos(\varphi-\alpha)$$

Kecepatan bola terhadap A

$$w = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}\sin(\varphi-\alpha)$$

$$w = \sqrt{u^2+v^2}\tan(\varphi-\alpha)$$

$$\tan(\varphi-\alpha) = \frac{\tan\varphi-\tan\alpha}{1+\tan\varphi\tan\alpha} = \frac{vy-ux}{vx+uy}$$

$$w = \frac{vy - ux}{vx + uy}\sqrt{u^2 + v^2}$$

3. Suatu partikel bergerak di bidang xy dengan kecepatan $\vec{v} = v_x \sin(\omega t)\,\hat{x} + v_y \cos(\omega t)\,\hat{y}$, dengan $v_y < v_x$. Tentukan jarak terjauh partikel dari posisi awalnya!

   a. $\frac{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}{\omega}$
   b. $\frac{v_x+v_y}{\omega}\sqrt{2}$
   c. $\frac{v_x-v_y}{\omega}\sqrt{2}$
   d. $\frac{2v_x}{\omega}$
   e. $\frac{2v_y}{\omega}$

   Jawaban: D ($\frac{2v_x}{\omega}$)

   Posisi partikel sebagai fungsi waktu

$$x = \int_0^t v_x \sin\omega t \; dt = \frac{v_x}{\omega}(1 - \cos\omega t)$$

$$\cos\omega t = 1 - \frac{x\omega}{v_x}$$

$$y = \int_0^t v_y \cos\omega t = \frac{v_y}{\omega}\sin\omega t$$

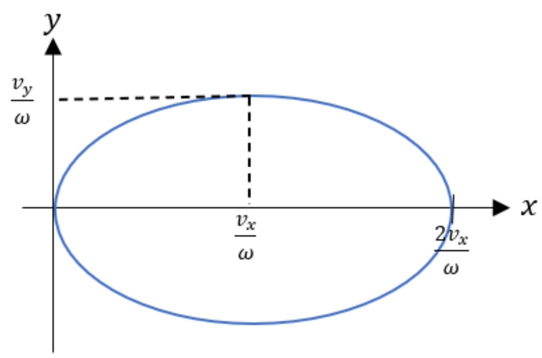
$$\sin\omega t = \frac{y\omega}{v_y}$$

   Identitas trigonometri

$$\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$$

$$\left(\frac{x - \frac{v_x}{\omega}}{\frac{v_x}{\omega}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{v_y}{\omega}}\right)^2 = 1$$

   Bentuk lintasan partikel adalah elips dengan pusat di $x_c = \frac{v_x}{\omega}$ dan $y_c = 0$



Jarak maksimum partikel adalah $x = \frac{2v_x}{\omega}$

4. Dua buah balok identik, balok A dan B, bermassa m diletakkan di atas sebuah bidang miring kasar dengan sudut kemiringan α. Balok A diletakkan pada posisi yang lebih tinggi dari balok B sehingga jarak pisah kedua balok adalah d. Koefisien gesek antara bidang miring dengan balok A dan B secara berturut-turut adalah μ_A dan μ_B, dengan $\mu_A < \mu_B < \tan\alpha$. Kedua balok kemudian dilepaskan secara bersamaan. Dengan menganggap semua tumbukan yang terjadi bersifat elastis, waktu terjadinya tumbukan untuk yang kelima kalinya dapat dinyatakan sebagai

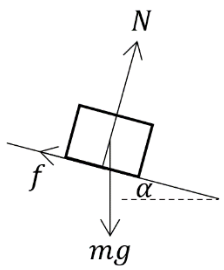
$$t = \sqrt{\frac{\eta d}{(\mu_B - \mu_A) g \cos\alpha}}$$

Tentukan nilai η!

a. 18
b. 50
c. 81
d. 100
e. 162

Jawaban: E. 162

Cari waktu terjadinya tumbukan untuk yang pertama kalinya terlebih dahulu. Tinjau persamaan gaya pada masing-masing balok.



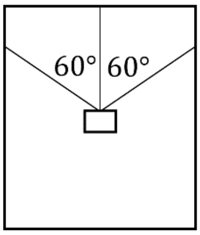
$$mg\sin\alpha - \mu N = ma$$

$$N = mg\cos\alpha$$

Didapatkan percepatan balok A adalah $a_A = g\sin\alpha - \mu_A g\cos\alpha$ dan percepatan balok B adalah $a_B = g\sin\alpha - \mu_B g\cos\alpha$. Percepatan relatif kedua balok adalah $a_r = (\mu_B - \mu_A) g\cos\alpha$, sehingga tumbukan pertama akan terjadi setelah $t_1 = \sqrt{\frac{2d}{(\mu_B - \mu_A) g\cos\alpha}}$.

Setelah tumbukan yang pertama, kecepatan relatif kedua balok $v_{r1}' = -(\mu_B - \mu_A) g t_1 \cos\alpha$. Sesaat sebelum balok bertumbukan untuk yang kedua kalinya, kecepatan relatif kedua balok haruslah $v_{r2} = (\mu_B - \mu_A) g t_1 \cos\alpha$. Ini akan tercapai setelah waktu $2t_1$ dihitung dari tumbukan pertama. Maka, tumbukan kedua terjadi setelah $3t_1$. Hal yang sama dapat diterapkan untuk tumbukan-tumbukan berikutnya, yaitu waktu antar tumbukan selalu sama $= 2t_1$. Jadi, tumbukan kelima akan terjadi setelah $t_1 + 4 \times 2t_1 = 9t_1 = \sqrt{\frac{162d}{(\mu_B - \mu_A) g\cos\alpha}}$

5. Perhatikan gambar berikut ini!



Sebuah paket digantung dengan tiga buah tali di dalam sebuah lift yang sedang bergerak naik. Diketahui saat ini kecepatan lift $v = 10$ m/s dan lift sedang dipercepat ke atas dengan percepatan $a = 10$ m/s^2. Jika besar tegangan tali sama untuk ketiga tali, yaitu 10 N, tentukan massa paket!

a. 1 kg
b. 2 kg
c. 5 kg
d. 10 kg
e. 20 kg

Jawaban: A. 1 kg

Tinjau persamaan gaya arah vertikal pada balok.

$$T + 2T\cos 60° - mg = ma$$

$$10 + 2(10)\left(\frac{1}{2}\right) - m(10) = m(10)$$

$$m = 1 \text{ kg}$$

6. Terdapat 10 bola yang dinomori 1, 2, 3, sampai 10. Bola-bola tersebut dibariskan di sumbu x sehingga bola bernomor j berada di $x = j$. Bola-bola yang bernomor ganjil diberikan kecepatan $v = v_x\hat{x} + v_y\hat{y}$, dengan $v_x, v_y > 0$. Sedangkan bola-bola yang bernomor genap diberikan kecepatan $v = -v_x\hat{x} + v_y\hat{y}$. Tentukan banyaknya tumbukan yang terjadi antara semua bola! (Anggap semua tumbukan yang terjadi bersifat elastis sempurna)

A. 9
B. 15
C. 25
D. 45
E. 55

Jawaban: B. 15

Soal ini dapat disederhanakan dengan melihat permasalahannya dalam kerangka yang bergerak dengan kecepatan $v_y\hat{y}$. Sekarang, bola-bola yang bernomor ganjil memiliki kecepatan $v = v_x\hat{x}$ dan bola-bola yang bernomor genap memiliki kecepatan $v = -v_x\hat{x}$ terhadap kerangka.

Definisikan suatu kelompok tumbukan sebagai tumbukan-tumbukan yang terjadi pada waktu yang sama. Kelompok tumbukan pertama terjadi antara bola bernomor j dan $j + 1$ untuk setiap j ganjil, sehingga jumlah tumbukan yang terjadi pada kelompok tumbukan pertama adalah $\frac{10}{2} = 5$. Ekspresi kecepatan bola ke-j setelah kelompok tumbukan pertama adalah sebagai berikut.

$$v_j = \begin{cases} -v_x\hat{x}, & j = 1 \\ v_x\hat{x}, & 2 \le j \le 9 \ (j \text{ genap}) \\ -v_x\hat{x}, & 2 \le j \le 9 \ (j \text{ ganjil}) \\ v_x\hat{x}, & j = 10 \end{cases}$$

Bola-bola bernomor j $(2 \le j \le 9)$ akan mengalami kelompok tumbukan lagi, sehingga soal ini bisa diselesaikan secara rekursif.

Misalkan $f(n)$ adalah banyak tumbukan yang terjadi antara n bola untuk n genap. Pada kelompok tumbukan pertama, terjadi sebanyak $\frac{n}{2}$ tumbukan. Bola ke-1 dan bola ke-n tidak akan mengalami tumbukan lagi. Jumlah tumbukan yang akan terjadi untuk bola-bola sisanya dapat dinyatakan dalam $f(n-2)$. Maka, fungsi $f(n)$ dapat dinyatakan sebagai $f(n) = \frac{n}{2} + f(n-2)$, dengan $f(0) = 0$. Jadi, $f(10) = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

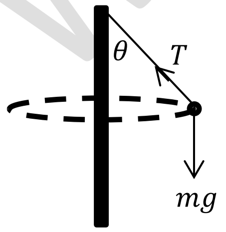
7. Sebuah partikel diletakkan di atas sebuah tiang vertikal licin yang sangat tipis. Antara partikel dan tiang vertikal dihubungkan dengan tali tidak bermassa yang pada awalnya terlilit sepenuhnya pada tiang. Lilitan tali yang terbentuk berjumlah sangat banyak. Kemudian, partikel dilepaskan dari tiang dan lilitan tali akan terbuka secara bertahap. Tentukan sudut yang dibentuk oleh tali dengan tiang saat lilitan tali terbuka sepenuhnya!

   a. $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$
   b. $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$
   c. $\sec^{-1}\sqrt{2}$
   d. $\cot^{-1}\sqrt{2}$
   e. $\tan^{-1}\sqrt{2}$

   Jawaban: E. $\tan^{-1}\sqrt{2}$

   Berikut adalah gambar sebelum partikel dilepaskan dari tiang.

   Saat lilitan tali terbuka sepenuhnya, partikel akan membentuk lintasan lingkaran.



   Misalkan sudut yang dibentuk antara tali dan tiang saat lilitan sudah terbuka sepenuhnya adalah θ dan panjang tali L. Persamaan hukum kekekalan energi adalah sebagai berikut.

$$mgL\cos\theta = \frac{1}{2}mv^2$$

Persamaan gaya pada partikel arah vertikal adalah $T\cos\theta = mg$. Sedangkan pada arah horizontal $T\sin\theta = \frac{mv^2}{L\sin\theta}$.

Dari ketiga persamaan tersebut, didapatkan $\tan^2\theta = 2$. Jadi, $\theta = \tan^{-1}\sqrt{2}$.

8. Suatu bola pejal dengan total massa M dan jari-jari R memiliki rapat massa yang tidak seragam. Diketahui bahwa rapat massa di titik tertentu berbanding lurus dengan jarak titik tersebut ke pusat bola $(\rho \propto r)$. Bola diberi kecepatan awal v_0 tanpa kecepatan sudut awal, kemudian bola tersebut diletakkan di permukaan kasar dengan koefisien gesek kinetis μ. Jika percepatan gravitasi adalah g, tentukan waktu yang diperlukan hingga bola tidak slip!

a. $\frac{3v_0}{5g\mu}$

b. $\frac{2v_0}{3g\mu}$

c. $\frac{5v_0}{7g\mu}$

d. $\frac{5v_0}{12g\mu}$

e. $\frac{4v_0}{13g\mu}$

Jawaban: E ($\frac{4v_0}{13g\mu}$)

$$\rho = Cr$$

$$M = \int_0^R Cr\,dV = \int_0^R C.4\pi.r^3 dr = C\pi R^4$$

$$C = \frac{M}{\pi R^4}$$

Bola pejal terdiri dari lapisan-lapisan elemen kulit bola

$$dI = \frac{2}{3} dm\, r^2$$

$$I = \int \frac{2}{3}.Cr\,.4\pi r^2 dr.r^2 = \int_0^R \frac{8\pi}{3} Cr^5 dr = \frac{4\pi}{9} CR^6$$

$$I = \frac{4\pi}{9}\frac{M}{\pi R^4}R^6 = \frac{4}{9}MR^2$$

Gaya gesek

$$f = N\mu = Mg\mu$$

Persamaan gaya

$$-f = M\frac{dv}{dt}$$

$$v = v_0 - g\mu\, t$$

Persamaan torsi

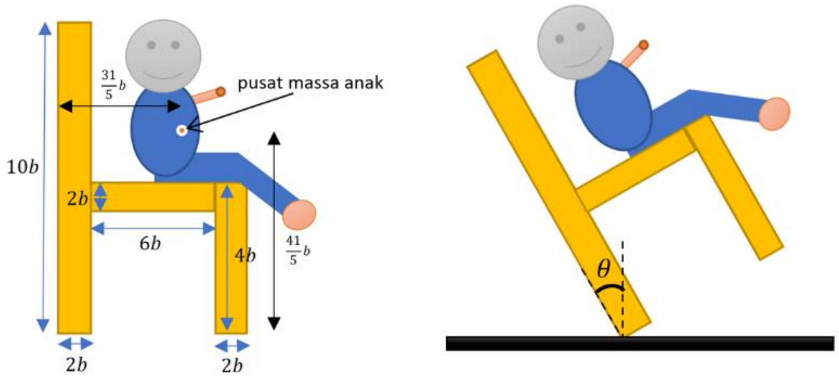
$$fR = I\frac{d\omega}{dt}$$

$$\omega R = \frac{9}{4} g\mu t$$

Bola tidak slip saat $v = \omega R$

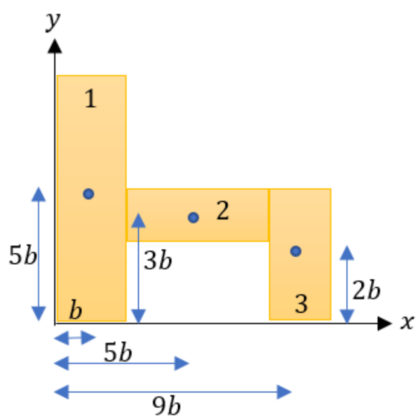
$$t = \frac{4}{13}\frac{v_0}{g\mu}$$

9. Seorang anak sedang duduk di atas kursi dengan kerapatan seragam. Lihat gambar (gambar tidak sesuai skala). Pusat massa anak berada pada jarak horizontal $\frac{31}{5}b$ dan jarak vertikal $\frac{41}{5}b$ diukur dari ujung kaki belakang kursi. Kemudian, anak tersebut memiringkan kursinya hingga mencapai sudut θ diukur dari garis vertikal. Jika massa anak sama dengan massa kursi, tentukan sudut θ maksimum agar anak tidak jatuh ke belakang!



a. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$
b. $\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$
c. $\tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$
d. $\tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)$
e. $\tan^{-1}(1)$

Jawaban: D $(\tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right))$



Massa berbanding lurus dengan luas

Luas Total: $10b.2b + 6b.2b + 2b.4b = 40\sigma b^2$

Massa ketiga segmen

$$M_1 = \frac{10b.2b}{40b^2} M = \frac{1}{2} M$$

$$M_2 = \frac{6b.2b}{40b^2} M = \frac{3}{10} M$$

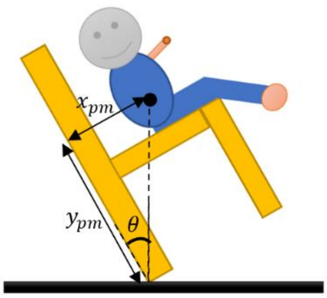
$$M_3 = \frac{4b.2b}{40b^2} M = \frac{1}{5} M$$

Letak pusat massa sistem

$$x_{pm} = \sum m_i x_i = \frac{\frac{1}{2}M\,.\;b + \frac{3}{10}M\,.\;5b + \frac{1}{5}M\,.\;9b + M\,.\;\frac{31}{5}b}{M+M} = 5b$$

$$y_{pm} = \sum m_i y_i = \frac{\frac{1}{2}M\,.\;5b + \frac{3}{10}M\,.3b + \frac{1}{5}M\,.\;2b + M\,.\;\frac{41}{5}b}{M+M} = 6b$$

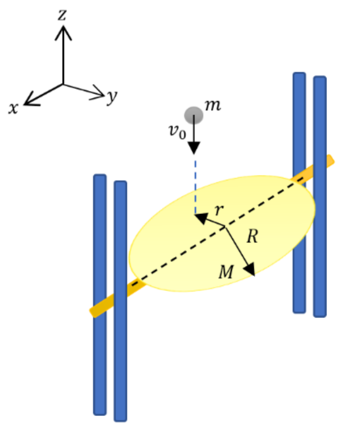
Sistem akan tepat tidak jatuh saat total torsi terhadap ujung kaki kursi nol, yaitu saat pusat massa sistem tepat di atas ujung kaki kursi.



$$\tan\theta = \frac{x_{pm}}{y_{pm}} = \frac{5b}{6b} = \frac{5}{6}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)$$

10. Piringan dengan massa M dan jari-jari R yang mula-mula berada di bidang xy ditempelkan ke suatu batang tidak bermassa yang berada di sumbu x seperti pada gambar berikut. Batang ini kemudian dijepit oleh empat batang lainnya yang dijaga tetap sehingga batang tersebut (beserta piringan) hanya bisa bergerak di arah z. Sebuah bola bermassa m dilemparkan dengan kecepatan v_0 ke arah tegak lurus bidang piringan di jarak r pada arah sumbu y dari pusat piringan. Abaikan gesekan



dan gravitasi. Jika tumbukan bersifat tidak lenting sama sekali, tentukan kecepatan sudut piringan setelah tumbukan!

a. $\frac{v_0 r}{r^2+\frac{M}{m}R^2}$

b. $\frac{v_0 r}{r^2+\frac{M}{2m}R^2}$

c. $\frac{v_0 r}{r^2+(1+\frac{M}{m})R^2}$

d. $\frac{v_0 r}{r^2+\left(1+\frac{M}{m}\right)\frac{R^2}{2}}$

e. $\frac{v_0 r}{r^2+\left(1+\frac{M}{m}\right)\frac{R^2}{4}}$

Jawaban: E $\left(\frac{v_0 r}{r^2+\left(1+\frac{M}{m}\right)\frac{R^2}{4}}\right)$

Teorema sumbu tegak lurus

$$I_x + I_y = I_z = \frac{1}{2}MR^2$$

Piringan simetris sehingga

$$I_x = I_y$$

$$I_x = \frac{1}{2}I_z = \frac{1}{4}MR^2$$

Setelah tumbukan, M akan bergerak dengan kecepatan v_M dan kecepatan sudut ω. Karena tumbukan bersifat tidak lenting sama sekali, m akan menempel dengan M sehingga kecepatan m setelah tumbukan adalah $v_m = v_M + \omega r$

Momentum linear kekal

$$mv_0 = mv_m + Mv_M$$

$$mv_0 = (m+M)v_M + m\omega r$$

Momentum sudut kekal

$$mv_0 r = mv_m r + I_x \omega$$

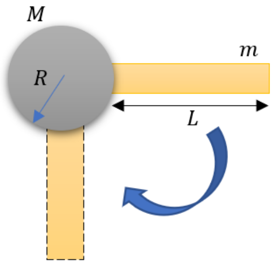
$$mv_0 r = mv_M r + \left(mr^2 + \frac{1}{4}MR^2\right)\omega$$

Eliminasi v_M pada kedua persamaan

$$\omega = \frac{v_0 r}{r^2 + \left(1 + \frac{M}{m}\right)\frac{R^2}{4}}$$

11. Pak Arifin ingin membuka pintu dengan gagang yang terdiri dari silinder pejal bermassa M dan jari-jari R yang tersambung dengan batang pejal bermassa m dan panjang L (lihat gambar). Pintu akan terbuka jika gagang berputar sebanyak 90 derajat. Terdapat gesekan yang mengakibatkan torka sebesar $\tau_f = -(\alpha + \beta\omega)\tau_0$ terhadap pusat silinder. Jika Pak Arifin mengeluarkan torka konstan sebesar τ_0, tentukan waktu yang dibutuhkan Pak Arifin untuk membuka pintu! Anggap Pak Arifin sangat kuat sehingga τ_0 jauh lebih besar dari torka akibat gravitasi. Asumsikan $L \gg R$ dan $\beta \ll 1$.

    Petunjuk: $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$ untuk $x \ll 1$



    a. $\sqrt{\frac{\pi}{2\tau_0(1-\alpha)}\left(\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}mL^2\right)}$
    b. $\sqrt{\frac{\pi}{2\tau_0(1-\alpha)}\left(\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{3}mL^2\right)}$
    c. $\sqrt{\frac{\pi}{\tau_0(1-\alpha)}\left(\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{3}mL^2\right)}$
    d. $\frac{\pi}{2\beta\tau_0(1-\alpha)}\left(\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{3}mL^2\right)$
    e. $\frac{\pi}{\beta\tau_0(1-\alpha)}\left(\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{3}mL^2\right)$

    Jawaban: C ($\sqrt{\frac{\pi}{\tau_0(1-\alpha)}\left(\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{3}mL^2\right)}$)

    Momen inersia sistem terhadap pusat silinder

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{1}{2}L + R\right)^2$$

$$I \approx \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{3}mL^2$$

    Persamaan gerak sistem

$$\Sigma\tau = I\frac{d\omega}{dt}$$

$$\tau_0 - (\alpha + \beta\omega)\tau_0 = I\frac{d\omega}{dt}$$

$$\int_0^t \frac{\tau_0}{I}\,dt = \int_0^\omega \frac{d\omega}{(1-\alpha) - \beta\omega}$$

$$\frac{\tau_0}{I}t = -\frac{1}{\beta}\ln\frac{1-\alpha-\beta\omega}{1-\alpha}$$

$$\omega = \frac{1-\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta\tau_0}{I}t}\right)$$

Pintu akan terbuka saat $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^t \omega \, dt = \frac{\pi}{2}$$

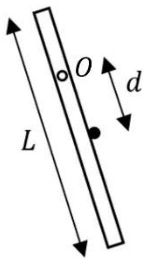
$$\frac{1-\alpha}{\beta}\left(t + \frac{I}{\beta\tau_0}\left(e^{-\frac{\beta\tau_0}{I}t} - 1\right)\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1-\alpha}{\beta}\left(t + \frac{I}{\beta\tau_0}\left(1 - \frac{\beta\tau_0}{I}t + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta\tau_0}{I}t\right)^2 - 1\right)\right) \approx \frac{\pi}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{\pi I}{\tau_0(1-\alpha)}}$$

$$t = \sqrt{\frac{\pi}{\tau_0(1-\alpha)}\left(\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{3}mL^2\right)}$$

12. Perhatikan gambar berikut ini!



Sebuah pendulum berupa batang homogen bermassa m dan panjang L dengan poros O pada jarak $\frac{L}{6}$ di atas pusat massa batang. Kemudian sebuah benda titik bermassa m ditempelkan pada jarak $d = \frac{L}{3}$ di bawah poros. Pendulum diayunkan pada bidang vertikal dengan simpangan kecil. Tentukan kecepatan sudut osilasi sistem!

a. $\sqrt{\frac{3g}{2L}}$

b. $\sqrt{\frac{3g}{4L}}$

c. $\sqrt{\frac{3g}{8L}}$

d. $\sqrt{\frac{9g}{4L}}$

e. $\sqrt{\frac{9g}{8L}}$

Jawaban: D. $\sqrt{\frac{9g}{4L}}$

Momen inersia batang jika diputar terhadap poros O adalah $I = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}mL^2$.

Misalkan pendulum tersebut disimpangkan dengan sudut θ kecil, maka persamaan energi pada pendulum adalah sebagai berikut.

$$E = mgd(1 - \cos\theta) + mg\left(\frac{L}{6}\right)(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}md^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}mL^2\right)\dot{\theta}^2$$

Untuk mendapatkan persamaan gerak pendulum, turunkan E terhadap waktu.

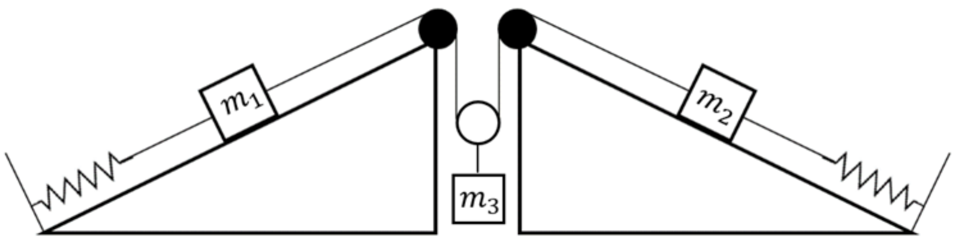
$$\frac{dE}{dt} = 0 = mgd\dot{\theta}\sin\theta + \frac{1}{6}mgL\dot{\theta}\sin\theta + md^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{1}{9}mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

Dengan menggunakan nilai $d = \frac{L}{3}$ dan aproksimasi $\sin\theta \approx \theta$, didapatkan persamaan berikut.

$$\ddot{\theta} = -\frac{9g}{4L}\theta$$

Jadi, kecepatan sudut osilasi sistem adalah $\omega = \sqrt{\frac{9g}{4L}}$.

13. Perhatikan gambar berikut ini!



Diketahui $m_1 = m_2 = 2m$, $m_3 = 3m$ dan konstanta pegas sebesar k. Anggap katrol licin sempurna dan tali tidak bermassa. Jika m_3 disimpangkan sedikit dari kondisi setimbang, tentukan periode osilasi sistem!

a. $2\pi\sqrt{\frac{3m}{k}}$

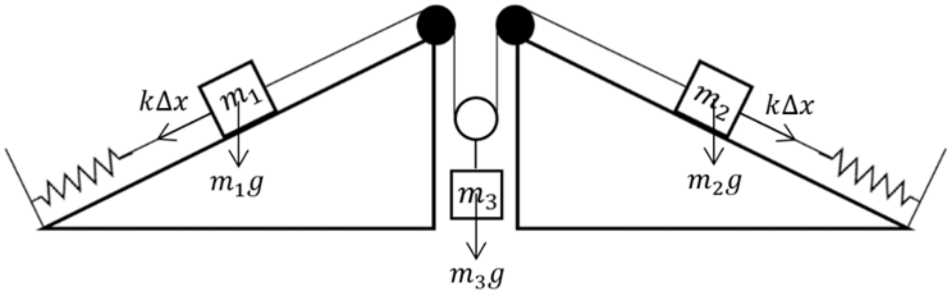
b. $2\pi\sqrt{\frac{5m}{2k}}$

c. $2\pi\sqrt{\frac{7m}{2k}}$

d. $2\pi\sqrt{\frac{5m}{4k}}$

e. $2\pi\sqrt{\frac{7m}{4k}}$

Jawaban: C. $2\pi\sqrt{\frac{7m}{2k}}$



Misalkan sudut kemiringan bidang miring θ. Tinjau persamaan gaya pada sistem saat setimbang $(\Delta x = x_0)$.

$$kx_0 + m_1 g \sin\theta + kx_0 + m_2 g \sin\theta = m_3 g$$

Persamaan gaya pada sistem saat m_3 disimpangkan sejauh x ke bawah adalah sebagai berikut.

$$k(x + x_0) + m_1 g \sin\theta + k(x + x_0) + m_2 g \sin\theta - m_3 g = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x}$$

Dari kedua persamaan di atas, didapatkan persamaan berikut.

$$\ddot{x} = -\frac{2k}{m_1 + m_2 + m_3} x$$

Dengan mensubstitusikan nilai m_1, m_2, dan m_3, didapatkan periode osilasi sistem $T = 2\pi\sqrt{\frac{7m}{2k}}$.

14. Sebuah planet bermassa M terletak pada koordinat $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Sebuah partikel bermassa m $(m \ll M)$ dilepaskan pada koordinat $(x, y, z) = (R, 0, 0)$ dengan kecepatan $v_0 \hat{y}$. Diketahui lintasan partikel memenuhi persamaan-persamaan berikut ini.

$$y^2 = 4R(R - x), z = 0$$

Nilai dari v_0 dapat dinyatakan sebagai $\sqrt{\frac{\alpha GM}{\beta R}}$ dalam bentuk yang paling sederhana. Tentukan nilai $\alpha - \beta$!

a. -3
b. -1
c. 0
d. 1
e. 3

Jawaban: D. 1

Perhatikan bahwa persamaan lintasan partikel m merupakan persamaan parabola. Karena lintasan partikel m berbentuk parabola, maka energi mekanik $EM = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}m{v_0}^2 = 0$. Sehingga didapatkan $v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$.

15. Sebuah meriam ditembakkan dengan kecepatan $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ dan sudut elevasi θ dari permukaan planet yang berjari-jari R dan bermassa M. Jika diketahui $\sin\theta = \frac{2}{3}$, kecepatan minimum meriam

saat di udara dapat dinyatakan sebagai $\sqrt{\frac{\alpha GM}{\beta R}}$ dalam bentuk yang paling sederhana. Tentukan nilai $\alpha + \beta$!

a. 2
b. 3
c. 4
d. 5
e. 6

Jawaban: E. 6

Kecepatan minimum (v') tercapai saat meriam berada di ketinggian maksimum dari permukaan planet (h).

Persamaan hukum kekekalan energi adalah sebagai berikut.

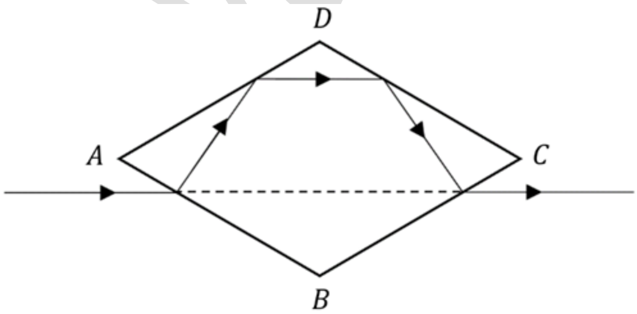
$$\frac{1}{2}mv_0{}^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{GMm}{R+h}$$

Persamaan hukum kekekalan momentum sudut adalah sebagai berikut.

$$mv_0R\cos\theta = mv'(R+h)$$

Dari kedua persamaan tersebut, substitusikan nilai $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ dan $\sin\theta = \frac{2}{3}$, sehingga didapatkan ekspresi untuk kecepatan minimum $v' = \sqrt{\frac{GM}{5R}}$ dan $\alpha + \beta = 6$.

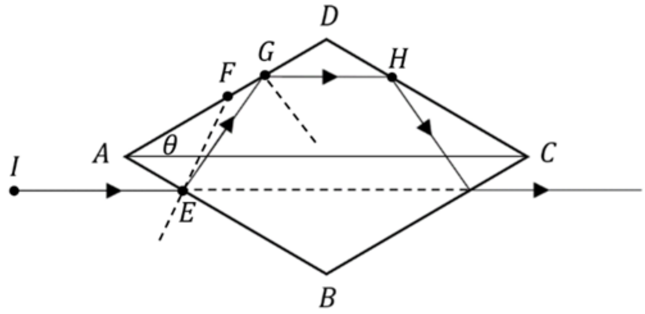
16. Perhatikan prisma belah ketupat yang disinari pada gambar berikut ini!



Sinar datang sejajar diagonal AC, mengenai prisma pada sisi AB dan dibiaskan, kemudian dipantulkan pada sisi AD dan DC, dan dibiaskan keluar dari prisma pada sisi BC dengan arah yang sama dengan arah sinar saat pertama kali masuk ke dalam prisma. Jika diketahui $\cos\angle CAD = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, tentukan indeks bias prisma! Petunjuk: $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

a. 1,2
b. 1,5
c. 1,6
d. 1,8
e. 2,0

Jawaban: D. 1,8



Misalkan $\angle CAD = \theta$ dan $\angle FEG = \alpha$. Maka, $\angle EFG = 2\theta + 90°$.

Kemudian, $\angle EGF = 180° - (2\theta + 90°) - \alpha = 90° - 2\theta - \alpha$ dan $\angle EGH = 2(2\theta + \alpha)$.

IE sejajar dengan GH, sehingga $\angle IEG = \angle EGH$.

$$90° + \theta + \alpha = 4\theta + 2\alpha$$

$$\alpha = 90° - 3\theta$$

Persamaan hukum Snellius untuk pembiasan pada sisi AB adalah sebagai berikut.

$$\sin(90° - \theta) = n \sin(90° - 3\theta)$$

$$\cos\theta = n\cos 3\theta$$

$$\cos\theta = n(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$

$$n = \frac{1}{4\cos^2\theta - 3}$$

Dengan memasukkan nilai $\cos\theta = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, didapatkan indeks bias prisma $n = 1{,}8$.

17. Cahaya dengan panjang gelombang 400 nm melewati dua celah sempit dengan jarak 0,5 mm. Sebuah layar diletakkan dengan jarak 4 m dari kedua celah. Tentukan jarak antara garis gelap kedua dengan garis terang ketiga yang berdekatan!

    a. 3,2 mm
    b. 4,8 mm
    c. 8,0 mm
    d. 9,6 mm
    e. 11,2 mm

    Jawaban: B. 4,8 mm

    Untuk percobaan celah ganda, jarak garis gelap ke-m dari terang pusat dirumuskan sebagai berikut.

$$y_{gelap,m} = \frac{\left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda L}{d}$$

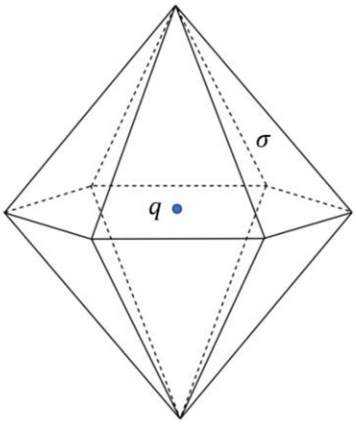
    Sedangkan jarak garis terang ke$-m$ dari terang pusat dirumuskan sebagai berikut.

$$y_{terang,m} = \frac{m\lambda L}{d}$$

    Dengan menggunakan informasi di soal, didapatkan $y_{gelap,2} = 4{,}8$ mm dan $y_{terang,3} = 9{,}6$ mm.

Sehingga jarak antara garis gelap kedua dengan garis terang ketiga yang berdekatan adalah $9{,}6\text{ mm} - 4{,}8\text{ mm} = 4{,}8\text{ mm}$.

18. Suatu hexagonal bipyramid beraturan (lihat gambar) diberi muatan per satuan luas seragam σ pada setiap sisinya. Jika muatan q diletakkan di pusat hexagonal bipyramid ini, tentukan besar gaya yang dialami oleh salah satu sisinya!



a. $\frac{q\sigma}{4\pi\varepsilon_0}$
b. $\frac{q\sigma}{6\pi\varepsilon_0}$
c. $\frac{q\sigma}{4\varepsilon_0}$
d. $\frac{q\sigma}{6\varepsilon_0}$
e. $\frac{q\sigma}{12\varepsilon_0}$

Jawaban: E ($\frac{q\sigma}{12\varepsilon_0}$)

Hexagonal bipyramid memiliki 12 sisi yang berada pada jarak yang sama dari q, maka flux yang dialami oleh salah satu sisinya adalah

$$\int \vec{E}\,.\,\overrightarrow{dA} = \frac{q}{\varepsilon_0} = 12\phi_1$$

$$\phi_1 = \frac{q}{12\varepsilon_0}$$

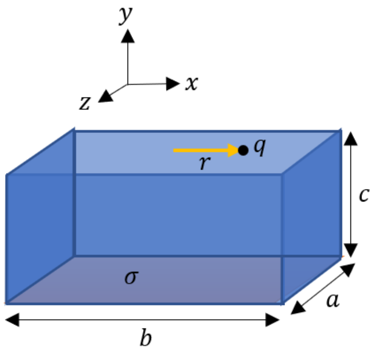
Gaya yang dialami oleh bidang hanya akan tersisa pada arah tegak lurus bidang saja, gaya arah tangensial akan cancel karena simetri (kiri dan kanan) bidang.

Gaya pada suatu elemen luas dA dimana medan $\vec{E}$ oleh q membentuk sudut θ terhadap permukaan bidang adalah

$$F_\perp = \int E\,dq \sin\theta = \int E\,(\sigma\,dA \sin\theta) = \sigma \int \vec{E}\,.\overrightarrow{dA} = \sigma\,\phi_1$$

$$F_\perp = \frac{q\sigma}{12\varepsilon_0}$$

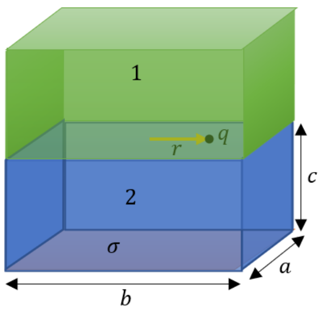
19. Kulit balok dengan panjang sisi a, b, c diberikan muatan dengan muatan per satuan luas seragam sebesar σ. Suatu muatan q diletakkan pada jarak $x = r$ dari pusat tutup atas balok (lihat gambar). Jika tutup atas balok dilepas (sehingga tersisa 5 sisi), tentukan gaya arah x yang dialami oleh muatan q!



a. 0
b. $\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}$
c. $\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 b}r$
d. $\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0\sqrt{a^2+b^2+c^2}}r$
e. $\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0(a^2+b^2+c^2)}r^2$

Jawaban: A (0)

Misal ditambahkan kulit balok lain dengan ukuran yang sama (tetapi yang dilepas adalah tutup bagian bawah) sehingga sistem menjadi kulit balok utuh dengan panjang sisi $(a, b, 2c)$



Dari simetri sistem, medan arah x oleh kulit balok 1 harus sama dengan medan arah x oleh kulit balok 2

$$E_{x_1} = E_{x_2}$$

Di dalam gabungan kulit balok 1 dan 2 tidak terdapat muatan lain yang bisa menghasilkan medan ke muatan q

Dengan menggunakan hukum gauss

$$\oint \vec{E}.\overrightarrow{dA} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} = 0$$

$$E_x = 0$$

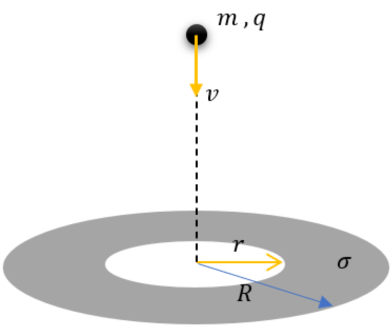
$$E_{x_1} + E_{x_2} = 0$$

$$E_{x_2} = 0$$

Gaya arah x yang dialami oleh q

$$F_x = qE_{x_2} = 0$$

20. Suatu piringan berlubang dengan jari-jari dalam r dan jari-jari luar R diberikan muatan sehingga memiliki muatan per satuan luas seragam sebesar σ seperti pada gambar berikut. Kemudian, muatan titik dengan massa m dan muatan q ditembakkan menuju pusat piringan dari jarak yang sangat jauh dengan kecepatan v_0. Abaikan gravitasi. Berapakah kecepatan v_0 minimum agar muatan ini bisa menembus piringan?



a. $\sqrt{\frac{q\sigma(R-r)}{m\varepsilon_0}}$

b. $\sqrt{\frac{q\sigma(R+r)}{m\varepsilon_0}}$

c. $\sqrt{\frac{q\sigma(R^2-r^2)}{2m\varepsilon_0 R}}$

d. $\sqrt{\frac{q\sigma(R^2-r^2)}{m\varepsilon_0 R}}$

e. $\sqrt{\frac{q\sigma(R^2+r^2)}{m\varepsilon_0 R}}$

Jawaban: A ($\sqrt{\frac{q\sigma(R-r)}{m\varepsilon_0}}$)

Potensial pada pusat piringan oleh elemen lingkaran yang berjarak r' dari pusat

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\,.\,2\pi r'\,.dr'}{r'}$$

Potensial total

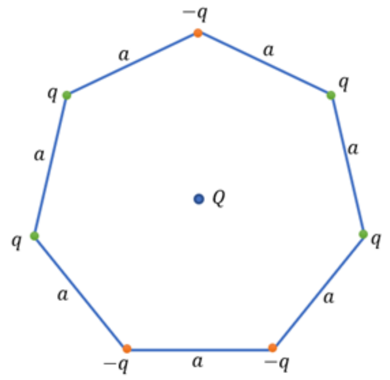
$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_r^R dr' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(R-r)$$

Hukum kekekalan energi

$$\frac{1}{2}mv^2 = q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(R-r)$$

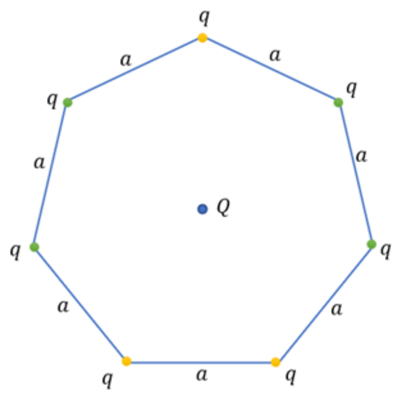
$$v = \sqrt{\frac{q\sigma}{m\varepsilon_0}(R-r)}$$

21. Segi 7 beraturan ditempatkan 3 muatan $-q$ dan 4 muatan $+q$ di setiap titik sudutnya seperti pada gambar berikut. Jika Q ditempatkan di pusat segi 7 ini, tentukan besar gaya yang dialami oleh Q!



a. $\frac{Qq}{\pi\varepsilon_0 a^2}\sin^2\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}$
b. $\frac{Qq}{\pi\varepsilon_0 a^2}\sin^2\frac{\pi}{7}(2\cos\frac{\pi}{7}-1)$
c. $\frac{Qq}{\pi\varepsilon_0 a^2}\sin^2\frac{\pi}{7}(2\cos\frac{\pi}{7}+1)$
d. $\frac{2Qq}{\pi\varepsilon_0 a^2}\sin^2\frac{\pi}{7}(2\cos\frac{\pi}{7}-1)$
e. $\frac{2Qq}{\pi\varepsilon_0 a^2}\sin^2\frac{\pi}{7}(2\cos\frac{\pi}{7}+1)$

Jawaban: D ($\frac{2Qq}{\pi\varepsilon_0 a^2}\sin^2\frac{\pi}{7}(2\cos\frac{\pi}{7}-1)$)



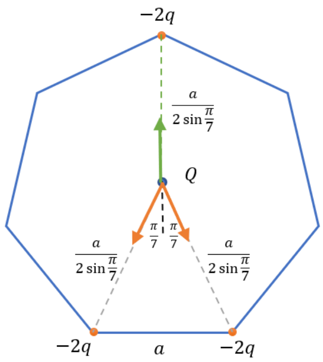
Misal muatan $-q$ diganti dengan muatan $+q$, sehingga semua titik sudut bermuatan q. Karena sistem simetris, maka medan $E_{total} = 0$

$$E_{4q} + E_{3q} = 0$$

$$E_{4q} = -E_{3q}$$

$$E_{4q} = E_{-3q}$$

Keberadaan 4 muatan $+q$ di empat titik sudut dapat digantikan oleh 3 muatan $-q$ di tiga titik sudut lainnya, sehingga, sistem 7 muatan ini dapat disederhanakan menjadi sistem 3 muatan dengan muatan $-q - q = -2q$



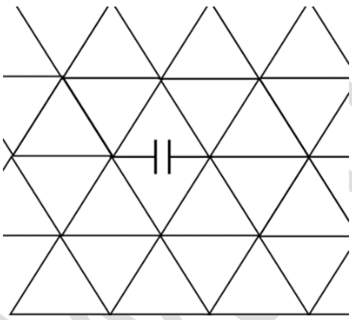
$$F_y = \frac{2qQ}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{7}}\right)^2} - 2\,.\,\frac{2qQ}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{7}}\right)^2}\cos\frac{\pi}{7}$$

$$F_y = \frac{2Qq}{\pi\varepsilon_0 a^2}\sin^2\frac{\pi}{7}\left(1 - 2\cos\frac{\pi}{7}\right)$$

$2\cos\frac{\pi}{7} > 1$, maka besar F_y adalah

$$|F_y| = \frac{2Qq}{\pi\varepsilon_0 a^2}\sin^2\frac{\pi}{7}\left(2\cos\frac{\pi}{7} - 1\right)$$

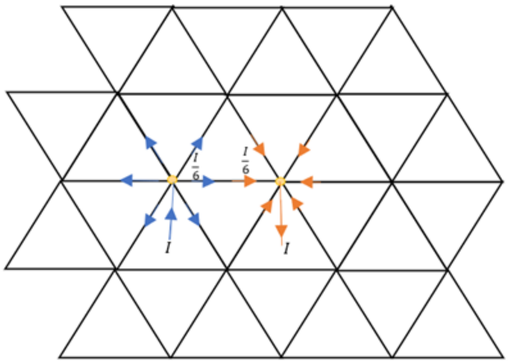
22. Suatu sistem hambatan berbentuk petak segitiga tak hingga yang masing-masing sisinya memiliki hambatan R. Kemudian, salah satu resistor dilepas, dan diganti oleh kapasitor dengan kapasitansi C yang sudah diberi muatan awal. Tentukan waktu saat muatan kapasitor menjadi $\frac{1}{e^2}$ kali muatan semula (e adalah bilangan euler)!



a. CR
b. $CR/2$
c. $CR/3$
d. $CR/4$
e. $CR/6$

Jawaban: A (CR)

Pertama-tama tinjau kondisi saat kapasitor belum terpasang dan sistem hambatan masih lengkap. Kemudian, suntik arus I di salah satu titik yang akan dipasang kapasitor dan tarik arus I di titik lainnya. Berdasarkan simetri sistem, arus akan terbagi menjadi $\frac{I}{6}$ di setiap sisinya.



Hambatan pengganti sistem ini adalah

$$I\,.\,R_p=\left(\frac{I}{6}+\frac{I}{6}\right)R$$

$$R_p=\frac{1}{3}R$$

Setelah hambatan R di tengah dilepas, hambatan pengganti sistem ini akan berubah dari R_p menjadi R_p'. Jika $R_p{}'$ diparalel dengan hambatan R, hambatannya akan menjadi R_p, maka

$$\frac{1}{R_p'}+\frac{1}{R}=\frac{1}{R_p}$$

$$R_p'=\frac{R}{2}$$

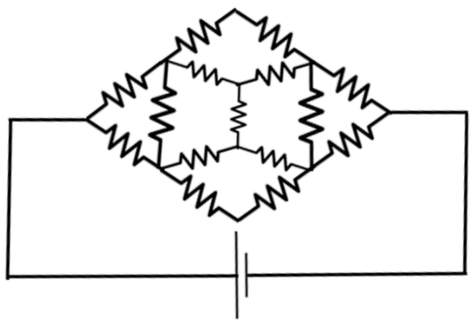
Sekarang tinjau rangkaian RC sederhana, dimana kapasitor C dihubungkan dengan R_p'

$$\frac{Q}{C}+\frac{dQ}{dt}R_p'=0$$

$$Q=Q_0e^{-\frac{t}{CR_p'}}=Q_0e^{-\frac{2t}{CR}}$$

Saat $Q=\frac{Q_0}{e^2}\rightarrow Q_0e^{-\frac{2t}{CR}}=Q_0e^{-2}\rightarrow t=CR$

23. Sebuah baterai dengan tegangan V dihubungkan dengan sistem rangkaian seperti pada gambar. Jika semua hambatan adalah R, tentukan arus listrik yang mengalir dari baterai!

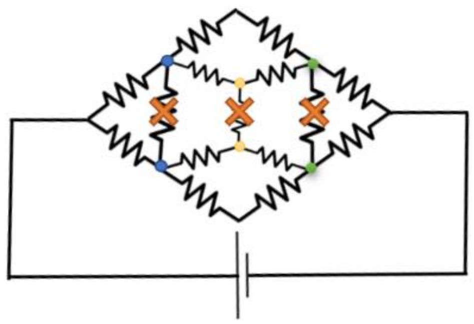


a. $V/4R$
b. $V/2R$
c. $2V/3R$
d. $3V/2R$
e. $2V/R$

Jawaban: C ($\frac{2V}{3R}$)

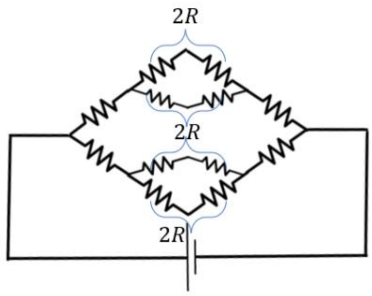
Dengan melihat simetri sistem rangkaian ini (bagian atas dan bawah), akan terdapat beberapa titik yang memiliki potensial yang sama dengan titik lainnya. Perhatikan gambar berikut. Titik-titik dengan potensial yang sama telah ditandai dengan warna yang sama. Jika potensial antara dua titik sama, tidak akan ada arus yang mengalir melewati hambatan, sehingga hambatan tersebut dapat dihilangkan.

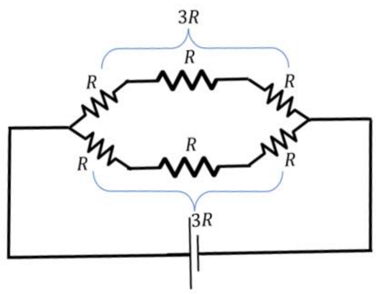
Kemudian, gunakan persamaan untuk seri dan paralel



$$R_{seri} = R_1 + R_2$$

$$\frac{1}{R_{paralel}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



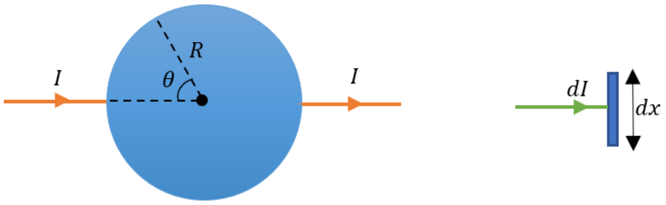


Kemudian $3R$ diparalel dengan $3R$ sehingga menjadi $\frac{3}{2}R$

$$I = \frac{V}{\frac{3}{2}R} = \frac{2V}{3R}$$

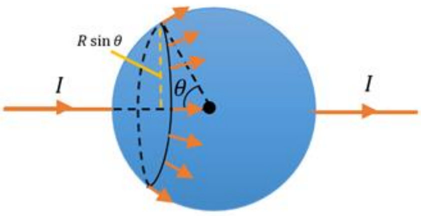
24. Suatu bola konduktor dengan jari-jari R dihubungkan ke dua kawat di ujung-ujungnya (lihat gambar kiri). Tentukan rapat arus permukaan sebagai fungsi sudut θ!

    Petunjuk: Jika ada elemen arus dI yang menembus permukaan dengan panjang tegak lurus arus dx (lihat gambar kanan), maka rapat arus permukaannya adalah $K = \frac{dI}{dx}$



a. $\frac{I}{2\pi R}\sin\theta$
b. $\frac{I}{2\pi R}\cos\theta$
c. $\frac{I}{2\pi R}\tan\theta$
d. $\frac{I}{2\pi R\sin\theta}$
e. $\frac{I}{2\pi R\cos\theta}$

Jawaban: D ($\frac{I}{2\pi R\sin\theta}$)

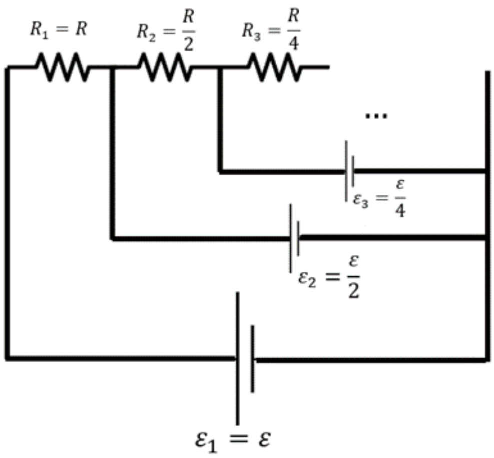


Arus masuk = Arus keluar

$$I = K\,.\,2\pi R\sin\theta$$

$$K = \frac{I}{2\pi R\sin\ \theta}$$

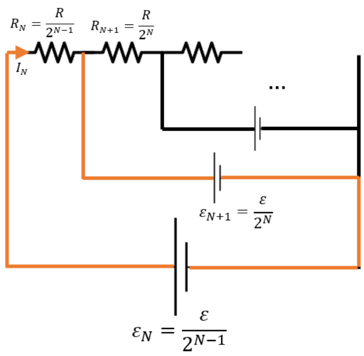
25. Suatu sistem baterai dan resistor tak hingga dibuat seperti pada gambar. Tegangan untuk baterai ke-n adalah $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$, sedangkan hambatan untuk resistor ke-n adalah $R_n = \frac{R}{2^{n-1}}$. Tentukan arus yang mengalir pada resistor ke-N (R_N)!



a. ε/R
b. $\varepsilon/2R$
c. $\varepsilon/2^N R$
d. $\varepsilon/2^{N+1} R$
e. $\varepsilon/2^{N-1} R$

Jawaban: B ($\varepsilon/2R$)

Untuk mendapat arus di resistor ke-N, cukup meninjau satu loop yang melewati $R_N, \varepsilon_N, \varepsilon_{N+1}$



Hukum Kirchoff II

$$-\varepsilon_N + \varepsilon_{N+1} + I_N R_N = 0$$

$$I_N \frac{R}{2^{N-1}} = \frac{\varepsilon}{2^{N-1}} - \frac{\varepsilon}{2^N}$$

$$I_N = \frac{\varepsilon}{2R}$$