# Modul Soal dan Pembahasan
# IRC Final 2022
# Wardaya College

## Paket Timur dan Barat



## Seri
## -OLIMPIADE MATEMATIKA-

Writer :
Valentio Iverson
June 24, 2022

# Draft Soal IRC Final Timur

1. Kiritio ingin memberikan Asna $k$ buah bilangan asli berbeda dari himpunan 100 bilangan asli pertama: $\{1, 2, \ldots, 100\}$ sehingga untuk sembarang bilangan asli $1 \leq j \leq 100$, Asna dapat mengambil sejumlah buah bilangan asli dari $k$ bilangan asli yang telah dipilih Kiritio, sehingga jumlah bilangan asli yang diambilnya adalah $j$. Tentukan nilai minimal yang mungkin dari $k$.

2. Diberikan sebuah bilangan bulat positif $k$. Definisikan sebuah barisan bilangan bulat $\{a_i\}$ sebagai berikut:

   - $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$.
   - Untuk sembarang $n \geq k+1$, definisikan
   $$a_n = \frac{a_{n-1} + \cdots + a_{n-m}}{m}$$
   dimana $m < n$ adalah bilangan asli terbesar sehingga $\frac{a_{n-1}+\cdots+a_{n-m}}{m} \in \mathbb{Z}$.

   Buktikan bahwa terdapat bilangan asli $N$ sehingga untuk sembarang indeks $i > N$, $a_i = C$ untuk suatu konstan $C$.

3. Untuk suatu segitiga lancip $\triangle ABC$, definisikan $\ell_A, h_A, m_A$ sebagai garis bagi, garis tinggi dan garis berat dari titik $A$ berturut-turut. Definisikan $\ell_B, \ell_C, h_B, h_C, m_B, m_C$ dengan cara yang sama. Diketahui bahwa $(\ell_A, h_B, m_C)$ konkuren, $(\ell_B, h_C, m_A)$ dan $(\ell_C, h_A, m_B)$ konkuren. Buktikan bahwa $\triangle ABC$ sama sisi.

4. Misalkan $\varphi(n)$ menotasikan banyaknya bilangan asli yang lebih kecil dari atau sama dengan $n$ yang relatif prima dengan $n$. Tentukan apakah terdapat barisan bilangan tak terhingga $\{a_i\}_{i\geq 1}$ dan $\{b_j\}_{j\geq 1}$ sehingga untuk sembarang bilangan asli berbeda $m$ dan $n$, kita punya $a_m, a_n, b_m, b_n$ saling berbeda satu sama lain dan memenuhi
   $$\varphi(a_i^2+1) \cdot \varphi(a_{i+1}^2+1) = \varphi(b_i^2+1)$$
   untuk setiap $i \in \mathbb{N}$.

5. Misal $a, b, c$ bilangan riil positif yang memenuhi
   $$a+b+c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ dan } abc = 1$$
   Buktikan bahwa
   $$a\sqrt{b^2-bc+c^2} + b\sqrt{c^2-ca+a^2} + c\sqrt{a^2-ab+b^2} \geq a+b+c + \frac{2(a-b)^2}{(a+b+c)^2-3}$$

# PEMBAHASAN

1. Kiritio ingin memberikan Asna $k$ buah bilangan asli berbeda dari himpunan 100 bilangan asli pertama: $\{1, 2, \ldots, 100\}$ sehingga untuk sembarang bilangan asli $1 \leq j \leq 100$, Asna dapat mengambil sejumlah buah bilangan asli dari $k$ bilangan asli yang telah dipilih Kiritio, sehingga jumlah bilangan asli yang diambilnya adalah $j$. Tentukan nilai minimal yang mungkin dari $k$.
**Solution.**
Jawabannya adalah 7, yaitu mengambil $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ dan ini jelas bekerja dari fakta representasi biner. Sekarang, akan dibuktikan bahwa 4 bilangan tidak akan kerja. Andai 6 bilangan kerja. Tinjau bahwa terdapat $2^6 - 1 = 63$ buah bilangan yang dapat dibentuk dari kumpulan bilangan ini. Namun, kita ingin membentuk $100 > 63$ bilangan, sebuah kontradiksi.

2. Diberikan sebuah bilangan bulat positif $k$. Definisikan sebuah barisan bilangan bulat $\{a_i\}$ sebagai berikut:

   - $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$.
   - Untuk sembarang $n \geq k + 1$, definisikan

   $$a_n = \frac{a_{n-1} + \cdots + a_{n-m}}{m}$$

   dimana $m < n$ adalah bilangan asli terbesar sehingga $\frac{a_{n-1}+\cdots+a_{n-m}}{m} \in \mathbb{Z}$.

   Buktikan bahwa terdapat bilangan asli $N$ sehingga untuk sembarang indeks $i > N$, $a_i = C$ untuk suatu konstan $C$.
**Solution.**
Definisikan $c_n$ sebagai bilangan asli sehingga

$$a_n = \frac{a_{n-1} + \cdots + a_{n-c_n}}{c_n}$$

untuk setiap bilangan asli $n$.

**Lemma 1.** *Barisan $\{n - c_n\}_{n>k}$ merupakan barisan tidak naik.*

*Proof.* Akan dibuktikan bahwa $n - c_n \geq (n+1) - c_{n+1}$, untuk setiap $n > k$. Cukup dibuktikan bahwa $c_{n+1} \geq c_n + 1$. Namun, ini cukup jelas sebab dari definisi $a_n$ dan $c_n$, kita punya

$$\frac{a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{(n+1)-c_n-1}}{c_n + 1} = \frac{a_{n-1} + \cdots + a_{n-c_n}}{c_n} \in \mathbb{Z}$$

Karena $c_{n+1} < n$ merupakan bilangan asli terbesar sehingga $\frac{a_{n-1}+\cdots+a_{n+1-c_{n+1}}}{c_{n+1}} \in \mathbb{Z}$ dan

$$\frac{a_n + \cdots + a_{(n+1)-c_n-1}}{c_n + 1} \in \mathbb{Z}$$

kita simpulkan bahwa $c_{n+1} \geq c_n + 1$. □

Sekarang, tinjau bahwa $m - c_m > 0$ untuk setiap bilangan asli $m > k$, dan $\{n - c_n\}_{n>k}$ merupakan barisan tidak naik dari lemma. Karena $m - c_m \in \mathbb{N}$ untuk setiap $m > k$, maka kita tahu bahwa $\{n - c_n\}_{n>k}$ merupakan barisan bilangan asli yang tidak naik, sehingga terdapat indeks $N$ sedemikian sehingga untuk sembarang $n - c_n$ konstan apabila $n > N$. Namun, apabila $n - c_n = (n+1) - c_{n+1}$, maka kita punya $c_{n+1} = c_n + 1$, yakni kita dapatkan

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{(n+1)-c_n-1}}{c_n + 1} = \frac{a_{n-1} + \cdots + a_{n-c_n}}{c_n} = a_n$$

sehingga barisan $\{a_n\}$ juga konstan.

3. Untuk suatu segitiga lancip $\triangle ABC$, definisikan $\ell_A, h_A, m_A$ sebagai garis bagi, garis tinggi dan garis berat dari titik $A$ berturut-turut. Definisikan $\ell_B, \ell_C, h_B, h_C, m_B, m_C$ dengan cara yang sama. Diketahui bahwa $(\ell_A, h_B, m_C)$ konkuren, $(\ell_B, h_C, m_A)$ dan $(\ell_C, h_A, m_B)$ konkuren. Buktikan bahwa $\triangle ABC$ sama sisi.
**Solution.**
Misalkan $L_{B,A}$ perpotongan $\ell_C$ dengan $AB$, $H_{C,B}$ perpotongan $h_A$ dengan $BC$, $M_{A,C}$ titik tengah $AC$, $H_{A,C}$ perpotongan $h_B$ dengan $AC$.

**Lemma 2.** *Apabila $h_A, m_B, \ell_C$ konkuren, maka $BH_{C,B} = H_{A,C}C$.*

*Proof.* Tinjau bahwa dari Teorema Ceva, kita punya

$$\frac{BH_{C,B}}{H_{C,B}C} \cdot \frac{CM_{A,C}}{M_{A,C}C} \cdot \frac{AL_{B,A}}{L_{B,A}B} = 1$$

Tinjau bahwa karena $CL_{B,A}$ garis bagi $\angle ACB$, maka

$$\frac{AL_{B,A}}{BL_{B,A}} = \frac{AC}{BC}$$

Maka,

$$BH_{C,B} \cdot AC = H_{C,B}C \cdot BC$$

Dari POP, kita punya $BH_{C,B} = CH_{A,C}$ $\square$

Gunakan lemma tersebut untuk ketiga kondisi konkurensi, maka kita dapatkan

$$BH_{C,B} = CH_{C,A} = AH_{A,B}$$

Misalkan $AB = c, BC = a, CA = b$, kita dapatkan

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2b} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}$$

Maka,

$$\frac{(a^2 + c^2 - b^2) + (b^2 + a^2 - c^2)}{2a + 2b} = \frac{(b^2 + a^2 - c^2) + (c^2 + b^2 - a^2)}{2b + 2c}$$

Ini berikan

$$\frac{a^2}{a+b} = \frac{b^2}{b+c}$$

Analog,

$$\frac{a^2}{a+b} = \frac{b^2}{b+c} = \frac{c^2}{c+a}$$

Kita dapatkan

$$\begin{aligned} a^2b + a^2c &= ab^2 + b^3 \\ b^2c + b^2a &= c^2b + c^3 \\ ac^2 + bc^2 &= a^2c + a^3 \end{aligned}$$

Jumlahkan ketiganya kita dapatkan

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^2b + b^2c + ac^2$$

Dari AM-GM, ini hanya dapat terjadi ketika $a = b = c$, yakni $\triangle ABC$ sama sisi.

4. Misalkan $\varphi(n)$ menotasikan banyaknya bilangan asli yang lebih kecil dari atau sama dengan $n$ yang relatif prima dengan $n$. Tentukan apakah terdapat barisan bilangan tak terhingga $\{a_i\}_{i\geq 1}$ dan $\{b_j\}_{j\geq 1}$ sehingga untuk sembarang bilangan asli berbeda $m$ dan $n$, kita punya $a_m, a_n, b_m, b_n$ saling berbeda satu sama lain dan memenuhi

$$\varphi(a_i^2 + 1) \cdot \varphi(a_{i+1}^2 + 1) = \varphi(b_i^2 + 1)$$

untuk setiap $i \in \mathbb{N}$.

**Solution.**

Ada. Tinjau bahwa untuk sembarang bilangan ganjil $x$, kita punya $\varphi(2x) = \varphi(x)$. Terlebih lagi, apabila $m$ dan $n$ saling relatif prima, maka $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

**Klaim.** $\gcd((2a-1)^2 + 1, (2a+1)^2 + 1) = 2$.

*Bukti.* Cukup mudah dilihat bahwa $x^2 + 1 \equiv 2 \pmod 4$ untuk $x$ ganjil.

Sekarang, andai sebaliknya, bahwa terdapat prima ganjil $p$ yang membagi $(2a-1)^2 + 1$ dan $(2a+1)^2 + 1$. Maka ia harus juga membagi $8a$, karena $p$ ganjil, maka $p \mid a$. Namun, kita punya $p \mid (2a-1)^2 + 1 \Rightarrow p \mid 2$, sebuah kontradiksi. Maka klaim jelas.

Sekarang, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \varphi((2a^2)^2 + 1) &= \varphi(4a^4 + 1) \\ &= \varphi((2a^2 - 2a + 1)(2a^2 + 2a + 1)) \\ &= \varphi(2a^2 - 2a + 1) \cdot \varphi(2a^2 + 2a + 1) \\ &= \varphi(2 \cdot (2a^2 - 2a + 1)) \cdot \varphi(2 \cdot (2a^2 + 2a + 1)) \\ &= \varphi((2a-1)^2 + 1) \cdot \varphi((2a+1)^2 + 1) \end{aligned}$$

Sekarang, untuk selesaikan soal ini, ambil $b_i = 2i^2$ untuk setiap $i$ dan $a_i = 2i - 1$ untuk setiap $i \in \mathbb{N}$ dan ini jelas kerja sebab $b_i$ monoton naik dan genap, sedangkan $a_i$ hanya dapat mengoutput bilangan ganjil yang monoton naik.

5. Misal $a, b, c$ bilangan riil positif yang memenuhi

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \text{ dan } abc=1$$

Buktikan bahwa

$$a\sqrt{b^2-bc+c^2}+b\sqrt{c^2-ca+a^2}+c\sqrt{a^2-ab+b^2} \geq a+b+c+\frac{2(a-b)^2}{(a+b+c)^2-3}$$

**Solution.**
Dari Cauchy Schwarz, kita punya

$$((a-b)^2+ab)((a-b)^2+4ab) \geq ((a-b)^2+2ab)^2$$

$$\sqrt{a^2-ab+b^2} \geq \frac{a^2+b^2}{a+b}$$

Oleh karena itu, kita dapatkan

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc} a\sqrt{b^2-bc+c^2} &\geq \sum_{cyc} \frac{a(b^2+c^2)}{b+c} \\
&= \sum_{cyc} a\left(\frac{b+c}{2}+\frac{(b-c)^2}{2(b+c)}\right) \\
&= \sum_{cyc} ab+\sum_{cyc} \frac{(b-c)^2}{2bc(b+c)} \\
&\geq a+b+c+\frac{(|a-b|+|b-c|+|c-a|)^2}{2\sum_{sym} a^2b} \\
&\geq a+b+c+\frac{2(a-b)^2}{\sum_{sym} a^2b} \\
&= a+b+c+\frac{2(a-b)^2}{(ab+bc+ca)(a+b+c)-3abc} \\
&= a+b+c+\frac{2(a-b)^2}{(a+b+c)^2-3}
\end{aligned}$$

Kesamaan terjadi ketika $a=b=c=1$.

# Draft Soal IRC Final Barat

1. Kita katakan sebuah segitiga *menarik* apabila segitiga tersebut lancip dan tidak sama kaki. Untuk sembarang $\triangle ABC$ yang *menarik* dengan lingkaran luar $\Gamma$, kita definisikan $A'$ sebagai titik di $\Gamma$ sehingga $AA' \parallel BC$. Definisikan $B'$ dan $C'$ dengan cara yang sama. Buktikan bahwa
$$\min(A'B', B'C', C'A') < \max(AB, BC, CA).$$

2. Kazuma menuliskan tiga buah bilangan asli berbeda pada papan tulis. Setiap putaran, Megumin diperbolehkan memilih dua bilangan $m$ dan $n$ di papan tulis, menghapus $m$, dan menuliskan $n - \gcd(n, m)$ atau $\operatorname{lcm}(n, m) - n$ di papan tulis. Apabila pada suatu saat Megumin menuliskan bilangan 0, maka Megumin kalah. Buktikan bahwa kombinasi bilangan apapun yang dituliskan Kazuma awalnya, Megumin bisa menjamin bahwa dia tidak akan kalah.

3. Diberikan $a, b, c$ bilangan riil bukan nol yang memenuhi persamaan
$$|(a+b)(b+c)(c+a)| = |(a-b)(b-c)(c-a)|$$
Tentukan nilai minimum yang mungkin dari
$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right|$$

4. Diberikan sebuah segitiga $\triangle ABC$ dengan lingkaran luar $\Gamma$ dengan pusat $O$. Titik $A'$ pada $\Gamma$ merupakan titik tengah busur $BC$ yang tidak mengandung $A$. Definisikan $B'$ dan $C'$ dengan cara yang sama. Andai $B'C'$ menyinggung lingkaran dalam $\triangle ABC$ di $X$ dan lingkaran dalam $\triangle ABC$ menyinggung $BC$ di $D$. Andaikan garis $OX$ dan $DA'$ sejajar (atau berimpit), buktikan bahwa $\triangle ABC$ sama sisi.

5. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sehingga
$$m \mid f(n) \text{ jika dan hanya jika } f(m) \mid n$$
untuk sembarang $m, n \in \mathbb{N}$.

# PEMBAHASAN

1. Kita katakan sebuah segitiga *menarik* apabila segitiga tersebut lancip dan tidak sama kaki. Untuk sembarang $\triangle ABC$ yang *menarik* dengan lingkaran luar $\Gamma$, kita definisikan $A'$ sebagai titik di $\Gamma$ sehingga $AA' \parallel BC$. Definisikan $B'$ dan $C'$ dengan cara yang sama. Buktikan bahwa
$$\min(A'B', B'C', C'A') < \max(AB, BC, CA).$$

**Solution.**
Kita bagi lingkaran menjadi 3 daerah busur: busur minor $AB$, busur minor $BC$ dan busur minor $CA$.
**Klaim.** Dua dari $A', B', C'$ terletak pada busur yang sama.

*Proof.* Andai $A', B', C'$ semuanya terletak pada busur yang berbeda. Jelas bahwa $A'$ tidak dapat terletak pada busur minor $BC$. Maka, WLOG $A'$ terletak pada busur minor $AB$. Kita dapatkan
$$\overset{\frown}{A'B} < \overset{\frown}{AB} \implies \angle ABC = \angle A'CB < \angle ACB$$
Tinjau bahwa $B'$ harus terletak pada busur minor $BC$ dari kondisi. Ini menyebabkan $\angle BCA < \angle BAC$. Dengan cara yang sama, $C'$ harus terletak pada busur minor $CA$ yang menyebabkan $\angle CAB < \angle CBA$. Ini menyebabkan
$$\angle CAB < \angle CBA < \angle ACB < \angle CAB$$
sebuah kontradiksi. $\square$

WLOG $A'$ dan $B'$ terletak pada busur yang sama. Jelas bahwa $A'$ tidak mungkin terletak pada busur $BC$ dan $B'$ tidak mungkin terletak pada busur $CA$. Maka, $A'$ dan $B'$ harus terletak pada busur $CA$.
Tinjau bahwa $\angle A'CB' < \angle ACB < 90^\circ \implies A'B' = \frac{\sin\angle A'C'B'}{\sin\angle ACB} \cdot AB < AB$ dari dalil sinus. Dengan kata lain
$$\min(A'B', B'C', C'A') \le A'B' < AB \le \max(AB, BC, CA)$$

2. Kazuma menuliskan tiga buah bilangan asli berbeda pada papan tulis. Setiap putaran, Megumin diperbolehkan memilih dua bilangan $m$ dan $n$ di papan tulis, menghapus $m$, dan menuliskan $n - \gcd(n, m)$ atau $\operatorname{lcm}(n, m) - n$ di papan tulis. Apabila pada suatu saat Megumin menuliskan bilangan 0, maka Megumin kalah. Buktikan bahwa kombinasi bilangan apapun yang dituliskan Kazuma awalnya, Megumin bisa menjamin bahwa dia tidak akan kalah.

**Solution.**
Kita akan mencoba meninjau kondisi bilangan di papan sesaat sebelum Megumin kalah. Ini terjadi apabila untuk sembarang dua bilangan $m$ dan $n$ di papan,
$$n - \gcd(n, m) = 0 \text{ dan } \operatorname{lcm}(m, n) - n = 0$$
karena apabila salah satu dari kedua bilangan di atas bukan nol, maka Megumin dapat menuliskan bilangan tersebut. Namun ini berarti bahwa $\operatorname{lcm}(m, n) = \gcd(m, n) \implies m = n$. Dengan kata lain, semua bilangan di papan sama.

Untuk membuktikan bahwa Megumin dapat mengambil langkah sehingga dia tidak akan kalah, cukup dibuktikan bahwa Megumin dapat menjamin bahwa ketiga bilangan di papan tulis tidak akan pernah sama. Tinjau bahwa kita hanya menggantikan 1 bilangan tiap putaran, dengan kata lain, untuk mencapai konfigurasi dimana semua bilangan sama, akan ada suatu saat dimana ada tepat 2 buah bilangan yang sama. Misalkan konfigurasi tersebut adalah $(a, a, b)$ untuk $a \neq b$ bilangan asli. Tinjau bahwa karena $a \neq b$, maka $a \nmid b$ atau $b \nmid a$.

- Apabila $a \nmid b$, maka ubah

$$(a, a, b) \mapsto (a, a - \gcd(a, b), b)$$

  Ini bekerja sebab apabila $a - \gcd(a, b) = 0$, maka $a \mid b$, kontradiksi.

- Apabila $b \nmid a$, maka ubah

$$(a, a, b) \mapsto (a, \operatorname{lcm}(a, b) - a, b)$$

  Ini bekerja sebab apabila $\operatorname{lcm}(a, b) - a = 0$, maka $b \mid a$, kontradiksi.

Dengan ini, kita selalu menjamin bahwa konfigurasi bilangan yang didapat Megumin hanya maksimal memiliki dua buah bilangan yang sama.

3. Diberikan $a, b, c$ bilangan riil bukan nol yang memenuhi persamaan

$$|(a + b)(b + c)(c + a)| = |(a - b)(b - c)(c - a)|$$

Tentukan nilai minimum yang mungkin dari

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right|$$

**Solution.**
Jawabannya adalah $\boxed{1}$, yang jelas tercapai dengan konfigurasi $(a, b, c) = (1, 1, -1)$. Akan dibuktikan bahwa 1 merupakan nilai minimum yang diinginkan. Tinjau bahwa $|X| = |Y|$ ekuivalen dengan $X^2 - Y^2 = 0$, sehingga persamaan ekuivalen dengan

$$(a^2b + b^2c + c^2a + abc)(ab^2 + bc2 + ca^2 + abc) = 0$$

Karena $a, b, c$ bukan nol, bagi dengan $a^2b^2c^2$ dan dapatkan

$$\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + 1\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + 1\right) = 0$$

Sehingga kondisi awal ekuivalen dengan $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = -1$ atau $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = -1$. Apabila kasus pertama terjadi, jelas bahwa

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right| = 1$$

Cukup dibuktikan bahwa apabila

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = -1$$

maka

$$\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right| \geq 1$$

Misalkan $x=\frac{a}{b}, y=\frac{b}{c}, z=\frac{c}{a}$ sebagai sembarang riil yang memenuhi

$$xyz=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=1 \text{ dan } xy+yz+zx=\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}=-1$$

Kita ingin buktikan bahwa $|x+y+z| \geq 1$. Namun ini jelas sebab

$$\begin{aligned}|x+y+z|^2 &= (x+y+z)^2\\ &= x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\\ &\geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2}+2(xy+yz+zx)\\ &= 3+2(-1)\\ &= 1\end{aligned}$$

4. Diberikan sebuah segitiga $\triangle ABC$ dengan lingkaran luar $\Gamma$ dengan pusat $O$. Titik $A'$ pada $\Gamma$ merupakan titik tengah busur $BC$ yang tidak mengandung $A$. Definisikan $B'$ dan $C'$ dengan cara yang sama. Andai $B'C'$ menyinggung lingkaran dalam $\triangle ABC$ di $X$ dan lingkaran dalam $\triangle ABC$ menyinggung $BC$ di $D$. Andaikan garis $OX$ dan $DA'$ sejajar (atau berimpit), buktikan bahwa $\triangle ABC$ sama sisi.
**Solution.**

**Lemma 3.** *$\angle BAC = 60°$.*

*Proof.* Pertama, akan dibuktikan bahwa $X$ merupakan titik tengah $AI$. Tinjau bahwa $C'A = C'I = C'B$ dan $B'A = B'I = B'C$. Akibatnya, $B'C'$ merupakan garis sumbu $AI$. Karena dari asumsi soal, $B'C'$ menyinggung lingkaran dalam $\triangle ABC$ di $X$, maka $X \in B'C'$, sehingga $XA = XI$. Cukup dibuktikan bahwa $A, X, I$ kolinear. Untuk ini, tinjau bahwa $XI \perp B'C'$ karena $B'C'$ menyinggung lingkaran dalam $\triangle ABC$. Maka, cukup dibuktikan $AI \perp B'C'$. Namun, dapat dilihat bahwa $A'C'IB$ merupakan layang layang sebab $C'A = C'I$ dan $B'A = B'I$. Akibatnya, dari sifat layang layang, $AI \perp B'C'$.

Sekarang, tinjau bahwa $AI = 2\cdot XI = 2\cdot IE$ apabila lingkaran dalam $\triangle ABC$ menyinggung $AB$ di $E$. Sehingga, kita dapatkan $\angle BAI = 30°$, yang mengakibatkan $\angle BAC = 60°$. □

**Lemma 4.** *$OX = DA'$.*

*Proof.* Tinjau bahwa karena $\angle BAC = 60°$, maka

$$\angle BOC = 2\angle BAC = 120° = \angle BA'C$$

Terlebih lagi, $OA' \perp BC$, mengakibatkan $BC$ membagi $OA$ menjadi dua bagian sama panjang. Akibatnya, $D \in BC$ memenuhi $DO = DA'$ juga. Cukup dibuktikan bahwa $DO = OX$. Tinjau bahwa $ID = IX$. Akibatnya, cukup dibuktikan bahwa $OI \perp DX$. Sekarang, andai refleksi $I$ terhadap $D$ adalah $Y$. Tinjau bahwa

$$\angle BYC = \angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC = 120°$$

Maka $Y \in (ABC)$. Sekarang, tinjau bahwa $DX \parallel AY$ sebab $\frac{IX}{XA} = \frac{ID}{DY}$. Akibatnya, kita cukup buktikan bahwa $OI \perp AY$. Namun, ini jelas sebab $OA = OY$, yaitu jari-jari lingkaran luar $(ABC)$ dan $IA = 2 \cdot IX = 2 \cdot ID = IY$. $\square$

Andai $OX \parallel DA'$ (atau berimpit), maka kita dapatkan $OXDA'$ jajar genjang **atau** O,X,D,A' kolinear. Di kedua kasus ini, kita dapatkan

$$XD \parallel OA' \perp BC$$

Tinjau bahwa $ID \perp BC$. Maka, $X, I, D$ kolinear. Terlebih lagi, karena $XI \perp B'C'$, maka $B'C' \parallel BC$. Maka,

$$I = B'B \cap C'C$$

terletak di perpendicular bisector $BC$. Namun, tinjau bahwa $I$ dan $O$ ada di sisi yang sama terhadap $BC$, dan

$$\angle BIC = \angle BOC = 120^\circ$$

Terlebih lagi, $I$ dan $O$ terletak pada perpendicular bisector $BC$. Maka, $I = O$. Tapi ini menyebabkan

$$\angle ABC = 2\angle IBC = 2\angle OBC = 60^\circ$$

Sehingga $\triangle ABC$ sama sisi.

5. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sehingga

$$m \mid f(n) \text{ jika dan hanya jika } f(m) \mid n$$

untuk sembarang $m, n \in \mathbb{N}$.

**Solution.**

Definisikan $\mathcal{P}$ sebagai himpunan semua prima. Definisikan fungsi involutif $g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$. Maka, semua fungsi yang memenuhi adalah:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f(p) &= g(p) \text{ untuk semua prima } p \\ f\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}\right) &= \prod_{i=1}^{k} f(p_i)^{\alpha_i} \end{aligned}$$

Dapat dicek bahwa fungsi ini memenuhi sebab apabila $m \mid f(n)$, maka

$$m \mid \prod_{i=1}^{k} f(p_i)^{\alpha_i}$$

Sehingga

$$m = \prod_{i=1}^{k} f(p_i)^{\beta_i}$$

dimana $\beta_i \leq \alpha_i$ untuk semua $1 \leq i \leq k$.

Karena fungsi $f$ involutif, maka

$$f(m) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i} \mid n$$

dari definisi. Arah yang satu lagi dapat dibuktikan dengan cara yang sama.

Sekarang, kita akan buktikan bahwa tidak ada fungsi lain yang memenuhi.

**Lemma 5.** *$f$ involutif*

*Proof.* Misal $P(m,n)$ menyatakan asersi $m \mid f(n) \Rightarrow f(m) \mid n$ dan $Q(m,n)$ menyatakan asersi $f(m) \mid n \Rightarrow m \mid f(n)$.
Tinjau bahwa $P(f(n), n)$ berikan $f(f(n)) \mid n$ dan $Q(n, f(n))$ berikan $n \mid f(f(n))$.
Kita dapatkan $f(f(n)) = n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. □

**Lemma 6.** $f(1) = 1$.

*Proof.* Perhatikan bahwa $P(1,1)$ menyebabkan $f(1) \mid 1$, yang berikan $f(1) = 1$. □

**Lemma 7.** *Untuk sembarang prima $p$, maka $f(p)$ prima.*

*Proof.* Dari injektivitas, apabila $f(p)$ tidak prima, maka $f(p)$ haruslah komposit.
Maka, akan ada setidaknya dua buah faktor yang bukan 1 dari $f(p)$, yakni $m_1, m_2$. Sekarang, tinjau bahwa $P(m_i, p), i = 1, 2$ berikan

$$f(m_1) \mid p \text{ dan } f(m_2) \mid p$$

Karena $f$ injektif, maka $f(m_1), f(m_2) \neq 1$, dan karena itu $f(m_1) = f(m_2) = p$, sebuah kontradiksi. □

**Lemma 8.** *$\tau(f(n)) = \tau(n)$ untuk semua bilangan asli $n$.*

*Proof.* Kita akan buktikan ini dengan induksi kuat di $\tau(n)$. Untuk $\tau(n) = 2$, ini jelas benar. Seandainya pernyataan ini benar untuk semua $\tau(n) \leq k$, untuk suatu bilangan asli $k \geq 2$, akan dibuktikan bahwa hal ini benar untuk $\tau(n) = k + 1$.
Pertama, apabila $\tau(n) = k + 1$, namun $\tau(f(n)) \geq k + 2$, maka ada setidaknya $k + 2$ buah faktor dari $f(n)$, yakni $m_1, m_2, \ldots, m_{k+2}$. Tinjau bahwa dari $P(m_i, n)$ untuk $i = 1, \ldots, k+2$, kita dapatkan

$$\begin{gathered} f(m_1) \mid n \\ f(m_2) \mid n \\ \vdots \\ f(m_{k+2}) \mid n \end{gathered}$$

Dari injektivitas, $n$ ada setidaknya $k + 2$ faktor berbeda, kontradiksi terhadap fakta bahwa $\tau(n) = k + 1$.
Maka, kita simpulkan apabila $\tau(n) = k+1$, maka $\tau(f(n)) \leq k+1$. Namun, kita tahu bahwa $\tau(f(n)) = \tau(n)$ untuk semua $\tau(n) \leq k$. Oleh karena itu, kita simpulkan bahwa haruslah $\tau(f(n)) = k + 1$. Maka, kita selesai dari induksi. □

**Lemma 9.** *$m \mid n$ jika dan hanya jika $f(m) \mid f(n)$.*

*Proof.* Tinjau bahwa $P(f(m), n)$ dan $Q(f(m), n)$, kita dapatkan klaim yang kita inginkan. □

**Lemma 10.** *$f(p^k) = f(p)^k$ untuk sembarang bilangan asli $k$.*

*Proof.* Pertama, kita buktikan bahwa tidak ada prima lain selain $f(p)$ yang membagi $f(p^k)$. Andaikan iya, dari surjektivitas, ada prima $\ell \neq p$ sehingga $f(\ell) \mid f(p^k)$. Sekarang, dari klaim sebelumnya, ini berikan $\ell \mid p^k$. Karena $\ell$ prima, $\ell = p$, sebuah kontradiksi. Sehingga, hanya ada prima $f(p)$ yang membagi $f(p^k)$. Setelah itu, tinjau bahwa

$$\tau(f(p^k)) = \tau(p^k) = k + 1$$

Oleh karena itu, sebab $f(p^k)$ perpangkatan dari $f(p)$, kita dapatkan $f(p^k) = f(p)^k$, yakni yang kita mau. □

Sekarang, untuk selesaikan soal, kita tinggal lihat bahwa apabila

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

Maka,

$$f(p_i^{\alpha_i}) \mid n$$

untuk setiap $1 \leq i \leq k$. Karena itu, kita dapatkan

$$\prod_{i=1}^{k} f(p_i)^{\alpha_i} \mid f(n)$$

Namun, $\tau(f(n)) = \tau(n)$ dari kondisi sebelumnya. Sehingga, kita dapatkan apa yang diminta.