Soal dan Solusi IRC Matematika
Paket Soal untuk Indonesia Bagian Barat
Tingkat Kabupaten

1. Rem ingin membeli 3 buah pensil dan 1 buah penghapus dari Ram, namun Rem kelebihan \$5. Apabila Rem membeli 1 buah pensil dan 5 buah penghapus dari Ram, maka Rem kekurangan \$3. Seandainya Rem memutuskan untuk membeli 2 buah pensil dan 3 buah penghapus dengan jumlah uang awal yang sama, maka Rem akan….
   A. mendapatkan kembalian \$1.
   B. kekurangan \$1.
   C. mendapat kembalian \$2
   D. kekurangan \$2
   E. tidak mendapat kembalian apapun

   Jawaban: A

   Solusi. Misal harga satu buah pensil p dan harga 1 buah penghapus q, dan Rem membawa R.

$$\begin{aligned} 3p + q &= R - 5 \\ p + 5q &= R + 3 \end{aligned}$$

   Jumlahkan kedua persamaan, kita dapatkan $4p + 6q = 2R - 2$, sehingga $2p + 3q = R - 1$. Maka apabila Rem ingin membeli 2 buah pensil dan 3 buah pensil, maka Rem mendapat kembalian \$1.

2. Bilangan prima terkecil yang tidak dapat dinyatakan dalam $2^a + 3^b$ untuk suatu bilangan nonnegative a, b adalah….
   A. 11
   B. 19
   C. 23
   D. 31
   E. 37

   Jawaban: C

   Solusi. Akan dibuktikan bahwa 23 tidak dapat dinyatakan dalam $2^a + 3^b$. Andai ada solusi (a, b) sehingga $2^a + 3^b = 23$.
   Tinjau modulo 3, maka $2^a \equiv 2 \pmod 3$, maka a harus ganjil. Terlebih lagi, $2^a < 23 < 2^5$, maka cukup cek $a = 1$ dan $a = 3$, yang keduanya tidak ada solusi.
   Untuk sembarang prima yang lebih kecil dari 23, maka tinjau

$$2 = 2^0 + 3^0$$
$$3 = 2^1 + 3^0$$
$$5 = 2^2 + 3^0$$
$$7 = 2^2 + 3^1$$
$$11 = 2^3 + 3^1$$
$$13 = 2^2 + 3^2$$
$$17 = 2^3 + 3^2$$
$$19 = 2^4 + 3^1$$

3. Diberikan sebuah segitiga ABC dengan $AB = 8$, $AC = 20$, $BC = 21$. Banyaknya titik X di BC sehingga jarak AX merupakan bilangan bulat adalah….
   A. 12
   B. 14
   C. 18
   D. 28
   E. 32

   Jawaban: B

   Solusi. Kita akan hitung tinggi dari vertex A.
   Dapat dihitung dengan mudah bahwa tingginya adalah $\frac{1}{2}\sqrt{231}$.
   Maka titik X sehingga AX minimum dan bilangan bulat adalah ketika $AX = \lceil \frac{1}{2}\sqrt{231} \rceil = 8$.
   Maka, akan ada $1 + (20 - 8 + 1) = 14$ titik yang mungkin.

4. Diberikan bilangan **kompleks** a, b, c yang memenuhi $a + b + c = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 3$. Nilai dari $\frac{a^2+1}{b+c} + \frac{b^2+1}{c+a} + \frac{c^2+1}{a+b}$ adalah….
   A. 4
   B. 6
   C. 8
   D. 9
   E. 12

   Jawaban: C

   Solusi. Perhatikan bahwa

$$6 = 3 + \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) = (a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \Rightarrow \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 2$$

   dan

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) = (a+b+c) + \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}\right) \Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 6$$

   Maka,

$$\frac{a^2+1}{b+c} + \frac{b^2+1}{c+a} + \frac{c^2+1}{a+b} = \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}\right) + \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) = 8$$

5. Sebuah papan berukuran 2021×2021, yang dipartisi menjadi petak 1×1, akan ditutupi oleh domino sehingga menyisakan sebuah petak 1×1 yang tidak tertutupi. Banyaknya lokasi petak 1×1 yang mungkin sehingga petak tersebut tidak tertutupi oleh domino adalah….
   A. $2021 \times 1011 + 1010$
   B. $2021 \times 1011 + 1011$
   C. $2021 \times 1010 + 1010$
   D. $2021 \times 1010 + 1011$
   E. 2021×2021

   Jawaban: D

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{\text{(D)}2021 \times 1010 + 1011}$.

Kita warnai papan 2021×2021 seperti pewarnaan papan catur sehingga petak-petak 1×1 terletak di pojok (corner) berwarna hitam. Di sini, kita punya 1 petak hitam lebih banyak daripada petak putih. Perhatikan bahwa, setiap kali domino dipasang, domino akan menutupi tepat 1 petak hitam dan 1 petak putih bagaimanapun cara peteletakan dominonya. Sehingga, semua petak putih tidak ada yang tidak tertutupi oleh domino.

Sekarang kita tunjukan konfigurasi penyusunan domino sehingga tepat 1 petak hitam tidak tertutupi domino.

Pertama-tama, kita beri koordinat $(x, y) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ pada setiap petak dengan petak pojok kiri bawah memiliki koordinat $(0, 0)$. Sehingga, petak warna hitam adalah petak dengan $x + y$ genap dan petak warna putih adaalah petak dengan $x + y$ ganjil.

Untuk petak hitam dengan x, y keduanya genap, susun domino secara horizontal kecuali untuk kolom ke-x. Untuk kolom ke-x, susun domino secara vertikal sehingga petak hitam yang ditarget dibiarkan tidak tertutupi.

Untuk petak hitam dengan x, y keduanya ganjil, pertama-tama, letakkan 4 domino sehingga menutupi 8 petak pada koordinat $(x-1, y-1), (x-1, y), (x-1, y+1), (x, y-1), (x, y+1), (x+1, y-1), (x+1, y), (x+1, y+1)$. Lalu tutupi petak sisanya selain petak pada (x, y) dengan susunan domino secara horizontal.

Dengan dimikian, kita telah membuktikan bahwa semua petak hitam menjadi petak yang mungkin untuk tidak ditutupi oleh domino. Jadi, jawbannya sama dengan banyaknya petak hitam yaitu $\boxed{2021 \times 1010 + 1011}$.

6. Banyaknya fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang memenuhi $f(x^2) + f(y^3) = f(x + y^2)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ adalah….
   A. 0
   B. 1
   C. 2
   D. 3
   E. 4

   Jawaban: A

   Solusi.
   Masukkan $x = y^3 - y^2$, kita dapatkan
   $$f((y^3 - y^2)^2) = 0$$
   untuk semua $y \in \mathbb{R}$. Perhatikan bahwa $(y^2(y-1))^2 \geq 0$ untuk semua $y \in \mathbb{R}$, dimana kesamaan tercapai ketika $y = 1$, sehingga $f(a^2) = 0$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$.
   Sekarang, kita punya
   $$f(y^3) = f(x + y^2) = f(x + (-y)^2) = f(-y^3)$$
   Sehingga f genap, maka $f(x) = 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$, sehingga hanya ada satu fungsi yang memenuhi, yakni $f(x) = 0$.

7. Banyak bilangan prima p sehingga terdapat bilangan asli x dan y sehingga $x^p + y^p = p!$ adalah….
   A. 0
   B. 1
   C. 2
   D. 3
   E. 4

   Jawaban: B

Solusi.
Jawabannya adalah $\boxed{1}$.
Untuk $p = 2$, jelas bahwa $x = y = 1$ memenuhi. Untuk sembarang $p \neq 2$. Tinjau bahwa dari Teorema Fermat Kecil,

$$p! = x^p + y^p \equiv x + y \pmod{p}$$

Sehingga $p \mid x + y$. Terlebih lagi, kita tahu bahwa $x, y < p$. Karena jika tidak, maka $x^p + y^p \geq p^p > p!$.
Karena itu, kita simpulkan bahwa $p \leq x + y < 2p$, sehingga $p = x + y$.
Oleh karena itu, kita punya

$$p! = x^p + (p - x)^p$$

Namun, dari Teorema Binomial Newton dan $p \geq 3$, $p^2 \mid x^p + (p - x)^p = p!$, sehingga $p \mid (p - 1)!$, kontradiksi.

8. Jika $x = \frac{\sqrt{77} - 5}{2}$, maka nilai dari $x^6 + 5x^5 + 3315x - 21$ adalah….
   A. -6401
   B. -1
   C. 0
   D. 1
   E. 6401

   Jawaban: E

<u>Solusi</u>
Manipulasi aljabar.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{77} - 5}{2} \\ 2x + 5 &= \sqrt{77} \\ 4x^2 + 20x + 25 &= 77 \\ x^2 + 5x - 13 &= 0 \end{aligned}$$

Dari baris terakhir kita dapat gunakan fakta bahwa

$$\begin{aligned} x^6 + 5x^5 - \cancel{13x^4} &= 0 && (\times x^4) \\ \cancel{13x^4} + \cancel{65x^3} - 169x^2 &= 0 && (\times 13x^2) \\ -\cancel{65x^3} - 325x^2 + 845x &= 0 && (\times(-65x)) \\ 494x^2 + 2470x - 6422 &= 0 && (\times 494) \end{aligned}$$

Jumlahkan keempat persamaan, didapat

$$x^6 + 5x^5 + 3315x - 6422 = 0 \Rightarrow x^6 + 5x^5 + 3315x - 21 = \boxed{6401}.$$

9. Banyaknya solusi $a, b, c, d \in N$ yang memenuhi 4 persamaan berikut adalah….

$$abcd - a = 2021$$
$$abcd - b = 2021$$
$$abcd - c = 2021$$
$$abcd - d = 2021$$

A. 0
B. 1
C. 4
D. 16
E. Tak terhingga banyaknya

Jawaban: A

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{\text{(A) } 0}$.

Perhatikan bahwa persamaan pertama bisa difaktorkan sebagai berikut

$$a(bcd - 1) = 2021$$

Dari sini, diperoleh $a \mid 2021$ sehingga a harus bilangan ganjil. Dengan cara yang serupa, diperoleh b, c, d juga harus bilangan ganjil.

Karena a, b, c, d merupakan bilangan ganjil, maka 4 bilangan berikut adalah bilangan genap.

$$abcd - a, abcd - b, abcd - c, abcd - d$$

Akibatnya kita punya $\boxed{0}$ solusi $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$. □

10. Diberikan sebuah segitiga ABC dimana M merupakan titik tengah sisi BC. Titik D merupakan titik pada lingkaran luar ABC sehingga $AD \perp BC$. Terlebih lagi, $DM \perp AC$. Apabila $AM = 20$ dan $\angle BCA = 15^\circ$, maka jari-jari lingkaran luar segitiga ABC dapat dinyatakan dalam $a(\sqrt{b} + \sqrt{c})$ dimana a, b, c merupakan bilangan asli dan b, c tidak habis dibagi oleh bilangan kuadrat yang lebih besar dari 1. Nilai dari $a + b + c$ adalah….

A. 16
B. 17
C. 18
D. 19
E. 20

Jawaban: C

Solusi. Tinjau bahwa $AD \perp CM$ dan $DM \perp AC$. Maka M orthocenter dari $\triangle ACD$. Ingat bahwa $(ABCD)$ siklis. Misalkan R merupakan jari-jari lingkaran luar $(ABCD)$. Maka

$$AM = 2R\cos\angle DAC = 2R\sin\angle ACB = 2R\sin 15^\circ = 2R\sin(45^\circ - 30^\circ) = 2R\left(\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$$

Maka,

$$R = \frac{10}{\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}} = 10(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

Oleh karena itu, $a = 10, b + c = 8$. Maka $a + b + c = \boxed{18}$.

11. Diketahui x, y adalah dua bilangan asli berbeda sehingga $KPK(x, y) = 2021$. Banyaknya kemungkinan nilai dari $FPB(x, y)$ adalah….
    A. 2
    B. 3
    C. 4
    D. 6
    E. 7

    Jawaban: B

    Solusi
    Karena KPK$(x, y) = 2021$ maka x dan y haruslah dua faktor berbeda dari 2021. WLOG, $x < y$.

    - $x = 1$. Mau tidak mau, $y = 2021$ sehingga $FPB(x, y) = 1$.
    - $x = 43$. Maka, $y = 47$ atau $y = 2021$ sehingga $FPB(x, y) = 1, 43$.
    - $x = 47$. Mau tidak mau, $y = 2021$ sehingga $FPB(x, y) = 47$.

    Jadi, terdapat $\boxed{3}$ kemungkinan nilai dari $FPB(x, y)$.

12. Definisi barisan real a_n untuk $n = 0,1,2, \dots$ dan $\frac{a_n+3}{a_{n+1}+3} = \frac{5a_n+13}{3a_{n+1}+7}$.
    Jika $a_{2021} = -1$ maka nilai dari $\frac{1}{a_0+3} = \cdots$.
    A. $\frac{1}{2}$
    B. $\frac{1}{3}$
    C. $\frac{1}{4}$
    D. $\frac{4043}{2}$
    E. $\frac{4043}{3}$

    Jawaban: D

Solusi

Perhatikan bahwa

$$\frac{a_n+3}{a_{n+1}+3}=\frac{5a_n+13}{3a_{n+1}+7}$$

ekuiEdward dengan

$$\begin{aligned}\frac{5a_n+13}{a_n+3}&=\frac{3_{n+1}+7}{a_{n+1}+3}\\4+\frac{a_n+1}{a_n+3}&=2+\frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}+3}\\2+\frac{a_n+1}{a_n+3}&=\frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}+3}\end{aligned}$$

Definisikan barisan b_n untuk $n=0,1,2,\ldots$ dimana $b_n=\dfrac{a_n+1}{a_n+3}$. Akibatnya, $b_n+2=b_{n+1}\rightarrow b_n=b_{n+1}-2$. Akan dibuktikan dengan induksi bahwa $b_0=b_k-2k$ untuk semua bilangan bulat positif k.

Bukti. Untuk $k=1$, maka $b_0=b_1-2$, yang sudah jelas dari definisi barisan b_n. Asumsikan untuk $k=m$ benar, maka $b_0=b_m-2m$. Untuk $k=m+1$, maka $b_0=b_m-2m=(b_{m+1}-2)-2m=b_{m+1}-2(m+1)=b_k-2k$. Jadi induksi kita terbukti benar.
Dari induksi di atas, kita dapat $b_0=b_{2021}-4042$. Karena $a_{2021}=-1$, maka $b_{2021}=0$. Jadi,

$$\begin{aligned}b_0&=b_{2021}-4042\\b_0&=-4042\end{aligned}$$

Karena $b_0=\dfrac{a_0+1}{a_0+3}$, maka

$$\begin{aligned}\frac{a_0+1}{a_0+3}&=-4042\\1-\frac{2}{a_0+3}&=-4042\\\frac{2}{a_0+3}&=4043.\\\frac{1}{a_0+3}&=\frac{4043}{2}\end{aligned}$$

Jadi, nilai dari $\dfrac{1}{a_0+3}$ adalah $\boxed{\dfrac{4043}{2}}$ □

13. Diberikan sebuah fungsi $f:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}$ yang memenuhi persamaan berikut

$$f(n+1)-f(n)=\begin{cases}n^2-1, \text{jika } n \text{ genap}\\ n,\ \text{jika n ganjil}\end{cases}.$$

Jika $f(0)=0$, maka 3 digit terakhir dari $f(2021)$ yaitu….

A. 500
B. 628
C. 629
D. 630
E. 650

Jawaban: C

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{\text{(C) } 629}$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(2021) &= f(2021) - f(0) \\ &= \sum_{i=0}^{2020} f(i+1) - f(i) \\ &= \sum_{k=0}^{1010} [f(2k+1) - f(2k)] + \sum_{k=0}^{1009} [f((2k+1)+1) - f(2k+1)] \\ &= \sum_{k=0}^{1010} [(2k)^2 - 1] + \sum_{k=0}^{1009} (2k+1) \\ &= \sum_{k=0}^{1010} (4k^2) - 1011 + \sum_{k=0}^{1009} (2k) + 1010 \\ &= 4 \cdot \frac{1010 \cdot 1011 \cdot 2021}{6} + 2 \cdot \frac{1009 \cdot 1010}{2} - 1 \\ &= 1376794629 \end{aligned}$$

Jadi, jawabannya adalah $\boxed{629}$.

14. Banyaknya faktor positif dari 21321 adalah….
    A. 6
    B. 8
    C. 12
    D. 16
    E. 18

    Jawaban: C

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{\text{(C) } 12}$.

Perhatikan bahwa fatorizasi prima dari 21321 adalah $21321 = 3^2 \cdot 23 \cdot 103$. Maka, banyak faktor positif dari 21321 adalah $(2+1)(1+1)(1+1) = \boxed{12}$.

Catatan: 21321 merupakan kepanjangan dari tanggal 21 Maret 2021 yang merupakan tgl babak penyisihan IRC. □

15. Diberikan $0^\circ \leq A, B, C \leq 180^\circ$dan $+B + C \ = 180^\circ$. Jika M dan m masing-masing merupakan nilai maksimum dan minimum dari$\cos A + \cos B + \cos C$. Berapakah nilai dari $M \ - \ m$?
    A. $\frac{1}{2}$
    B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
    C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
    D. 1
    E. $\frac{3}{2}$

    Jawaban: A

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{\text{(A) } \frac{1}{2}}$.

W.L.O.G. $0 \le A \le B \le C \le 180°$. Pertama-tama, kita cari dulu nilai M.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B &= 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\\ &\le 2\sin\left(\frac{C}{2}\right)\end{aligned}$$

dengan kesamaan terjadi ketika $A = B$. Lalu,

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B + \cos C &\le 2\sin\left(\frac{C}{2}\right) + \cos C\\ &= 2\sin\left(\frac{C}{2}\right) + \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{C}{2}\right)\right)\\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin\left(\frac{C}{2}\right)\right)^2\\ &\le \frac{3}{2}\end{aligned}$$

dengan kesamaan terjadi ketika $C = 60°$. Sehingga, $M = \frac{3}{2}$ terjadi ketika $A = B = C = 60°$.

Sekarang kita cari nilai dari m. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B + \cos C &= \cos A + \cos B - \cos(A+B)\\ &= 2\sin\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - \left(2\cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right) - 1\right)\\ &= 1 + 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - 2\cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right)\\ &= 1 + 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right)\\ &= 1 + 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\left(-2\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{-B}{2}\right)\right)\\ &= 1 + 4\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)\\ &\ge 1\end{aligned}$$

dengan kesamaan terjadi ketika salah satu dari A, B, C bernilai 0. Sehingga, $m = 1$. Jadi, $M - m = \boxed{\frac{1}{2}}$. □

16. Diberikan $x \in \mathbb{Q}$ sehingga memenuhi persamaan berikut

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2021} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{2021} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{2022}{2021} \right\rfloor = \lfloor 2021x \rfloor$$

Untuk semua nilai x yang memenuhi, banyaknya nilai $\lfloor 2021x \rfloor$ yang mungkin adalah….
A. 0
B. 2019
C. 2020
D. 2021
E. Tak terhingga

Jawaban: C

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{\text{(B) } 2020}$.

Charles Hermitte Theorem: Untuk sembarang $x \in \mathbb{R}$ dan nilai $n \in \mathbb{N}$ yang diketahui, maka

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

Catatan: Pembuktian Hermitte Theorem bisa dilakukan dengan nguli bagi n kasus.

Dengan menggunakan Hermitte Theorem, persamaan soal langsung jadi

$$\left\lfloor x + \frac{2021}{2021} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2022}{2021} \right\rfloor = 0$$

Dari sini, solusi yang mungkin adalah $-1 \le x < -1 + \frac{2020}{2021} \Leftrightarrow -1 \le x < -\frac{1}{2021} \Leftrightarrow -2021 \le 2021x < -1$. Sehingga $\lfloor 2021x \rfloor = -2021, -2020, \ldots, -2$ yang dengan kata lain ada $\boxed{2020}$ nilai berbeda yang memenuhi. □

17. Banyak cara mewarnai papan 5×5 dengan dua warna hitam dan putih sehingga setiap baris dan kolom memiliki tepat genap buah kotak hitam adalah….
A. 2^8
B. 2^9
C. 2^{16}
D. 2^{24}
E. 2^{25}

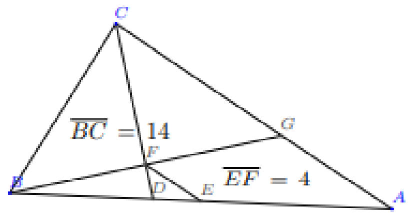
Jawaban: C

Solusi. Sekarang, kita bijeksikan setiap warna ke $\{-1, 1\}$ dengan hitam merupakan -1 dan putih merupakan 1. Kita tinjau perkalian tiap baris atau kolom. Perhatikan bahwa syarat identik dengan hasil kali tiap baris dan kolom adalah 1.
Namun ini identik dengan kita cukup mewarnai secara acak persegi 4×4 di atas dan kita telah selesai, masing - masing memberikan konfigurasi yang unik, sehingga banyaknya cara adalah 2^{16}.

18. Diberikan segitiga ABC dengan panjang $BC = 14$. Titik D pada AB sehingga CD adalah garis bagi $\angle ACB$. E adalah titik tengah segmen AB. Titik F pada CD sehingga BF tegak lurus CD. Jika panjang $EF = 4$, Panjang garis AC adalah….
A. 10
B. 16
C. 18
D. 22
E. 32

Jawaban: D

Solusi



Misal BF memotong AC di titik G. Perhatikan segitiga BCF dan GCF. Karena $CF = CF$, $\angle BCF = \angle GCF$ dan $\angle BFC = \angle GFC = 90^\circ$ maka segitiga BCF kongruen dengan segitiga GCF. Jadi $BC = CG = 14$. Lagi, karena $BF = FG$ dan $BE = AE$ maka EF sejajar AG dan $EF = \frac{1}{2}AG = 4 \to AG = 8$. Dengan demikian, $AC = AG + GC = 8 + 14 = \boxed{22}$.

19. Misal K adalah banyaknya cara kita dapat melabeli 17 bilangan asli pertama dengan tepat satu diantara 'asli' dan 'bulat', sehingga untuk setiap dua bilangan yang selisihnya ganjil, label yang diberikan akan berbeda. Banyaknya faktor positif dari K adalah….
    A. 2
    B. 8
    C. 16
    D. 17
    E. 18

    Jawaban: A

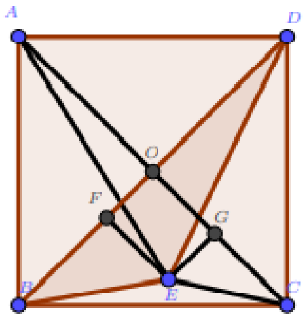
Solusi
Tinjau himpunan $S = \{1,3,5,\cdots,17\}$ dan $T = \{2,4,6,\cdots,16\}$. Apabila terdapat satu label yang dipakai di S, maka label yang sama tidak boleh dipakai oleh satupun bilangan di T, begitupun sebaliknya.

Dengan demikian, K adalah banyaknya kita memilih satu label dan melabeli semua bilangan di S dengan label itu dan semua bilangan di T dengan label satunya, alias hanya ada 2 cara. Banyak faktor positif dari K juga $\boxed{2}$.

20. Misalkan $ABCD$ adalah suatu persegi dan titik E terletak di dalam persegi tersebut sehingga $AE = 13$ dan $CE = 6$. Luas dari segitiga BED adalah….
    A. $\frac{39}{2}$
    B. $\frac{133}{4}$
    C. $\frac{205}{4}$
    D. 39
    E. $\frac{133}{8}$

    Jawaban:B

Solusi



Perhatikan gambar di atas.
Misal pusat persegi itu adalah O. Buat titik F dan G berturut-turut pada BD dan AC sehingga $EF \perp BD$ dan $EG \perp AC$. Kemudian, lihat bahwa

$$\begin{aligned} AE^2 - CE^2 &= AG^2 - GC^2 \\ 13^2 - 6^2 &= (AO + OG)^2 - (OC - OG)^2 \\ (13+6)(13-6) &= (AO + OC)(2OG) \\ 133 &= 2 \cdot AC \cdot OG \end{aligned}$$

Padahal, luas segitiga BPD adalah

$$\frac{1}{2} \cdot BD \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot OG = \boxed{\frac{133}{4}}$$

21. Misalkan m dan n adalah sepasang bilangan bulat positif dimana $n < m$ dan $7 \leq m \leq 13$. Edward dan Ayana bermain suatu permainan secara bergantian dengan aturan mula-mula terdapat m batu. Setiap pemain hanya boleh mengambil diantara 1 sampai n batu pada gilirannya. Pemain yang mengambil batu terakhir menang. Jika Edward mendapat giliran pertama. Banyaknya pasangan terurut (m, n) sehingga Ayana yang memiliki strategi menang adalah….
    A. 8
    B. 12
    C. 16
    D. 20
    E. 23

    Jawaban: C

Solusi

Perhatikan bila $n+1$ habis membagi m. Edward mengambil k batu, Ayana mengambil $n+1-k$ batu, maka Ayana pasti menang karena setiap ronde terambil $n+1$ batu. Andai $m \equiv a \pmod{n+1}$ dengan $0 < a < n+1$. Maka, Edward punya strategi menang. Ambil a batu, lalu jika Ayana mengambil k batu, Edward mengambil $n+1-k$ batu. Dengan demikian Edward yang mengambil batu terakhir. Jadi satu-satunya solusi supaya Ayana memiliki strategi menang adalah dengan mencari (m, n) sehingga $n+1|m$, dengan kata lain, banyaknya faktor dari m yang lebih dari atau sama dengan 2.

- Jika $m = 7$, maka terdapat 1 cara. $(n+1 = 7)$
- Jika $m = 8$, maka terdapat 3 cara. $(n+1 = 2, 4, 8)$
- Jika $m = 9$, maka terdapat 2 cara. $(n+1 = 3, 9)$
- Jika $m = 10$, maka terdapat 3 cara. $(n+1 = 2, 5, 10)$
- Jika $m = 11$, maka terdapat 1 cara. $(n+1 = 11)$
- Jika $m = 12$, maka terdapat 5 cara. $(n+1 = 2, 3, 4, 6, 12)$
- Jika $m = 13$, maka terdapat 1 cara. $(n+1 = 13)$

Jadi banyak pasangan (m, n) yang memenuhi adalah $1+3+2+3+1+5+1 = \boxed{16}$.

22. Diketahui titik D dan E berturut-turut pada sisi BC dan AB dari segitiga ABC. Garis AD dan CE berpotongan di titik F. Apabila $[BDE] = 36$, $[DEF] = 8$, $[ACF] = 24$, luas segitiga ABC adalah….
    A. 108
    B. $\frac{296}{3}$
    C. 96
    D. 72
    E. $\frac{68}{3}$

    Jawaban: A

Solusi

Perhatikan bahwa

$$[BDE]=\frac{BD}{BC}\cdot[BEC]=\frac{BD}{BC}\cdot\frac{BE}{AB}\cdot[ABC]$$

dan

$$[DEF]=\frac{EF}{EC}\cdot[EDC]=\frac{EF}{EC}\cdot\frac{DC}{BC}\cdot[BEC]=\frac{EF}{EC}\cdot\frac{DC}{BC}\cdot\frac{BE}{AB}\cdot[ABC]$$

Maka,

$$\frac{[BDE]}{[DEF]}=\frac{BD}{DC}\cdot\frac{EC}{EF}$$

Kemudian, perhatikan bahwa

$$[ACF]=\frac{AF}{AD}\cdot\frac{DC}{BC}\cdot[ABC]=\frac{CF}{CE}\cdot\frac{AE}{AB}\cdot[ABC]$$

Dengan demikian,

$$\frac{[BDE]}{[DEF]}=\frac{BD}{DC}\cdot\frac{EC}{EF}\text{ dan }\frac{[ABC]}{[ACF]}=\frac{AD}{AF}\cdot\frac{BC}{DC}=\frac{CE}{CF}\cdot\frac{AB}{AE}$$

Menurut Menelaus,

$$\frac{CD}{DB}\times\frac{AB}{AE}\times\frac{EF}{FC}=1$$

Akibatnya,

$$\frac{[BDE]}{[DEF]}=\frac{BD}{DC}\cdot\frac{EC}{EF}=\frac{\cancel{BD}}{\cancel{DC}}\cdot\frac{EC}{\cancel{EF}}\cdot\frac{\cancel{CD}}{\cancel{DB}}\cdot\frac{AB}{AE}\cdot\frac{\cancel{EF}}{FC}=\frac{AB}{AE}\cdot\frac{EC}{FC}=\frac{[ABC]}{[ACF]}$$

Kesimpulannya,

$$\frac{[BDE]}{[DEF]}=\frac{[ABC]}{[ACF]}$$
$$\frac{36}{8}=\frac{[ABC]}{24}$$
$$[ABC]=\boxed{108}$$

23. Banyaknya pasangan bilangan bulat $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_7$ yang memenuhi $x_1+x_2+x_3+x_4=10$ dan $x_4+x_5+x_6+x_7=7$ jika $x_i\geq 0$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,7$ adalah….
A. 5775
B. 5862
C. 5940
D. 6000
E. 6120

Jawaban: B

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{\text{(A) } 5862}$.

Perhatikan bahwa banyaknya pasangan bilangan cacah $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ yang memenuhi $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k = n$ ada sebanyak $\binom{n+k-1}{k-1}$.

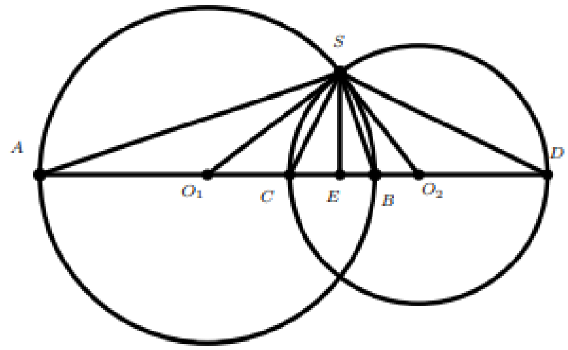
Dengan mengubah persamaan soal menjadi $x_1 + x_2 + x_3 = 10 - x_4$ dan $x_5 + x_6 + x_7 = 7 - x_4$, kita bisa hitung jawabannya lebih mudah dengan memanfaatkan x_4 sebagai parameter. Maka, jawabannya adalah

$$\sum_{x_4 \geq 0} \binom{(10 - x_4) + 3 - 1}{3 - 1} \cdot \binom{(7 - x_4) + 3 - 1}{3 - 1}$$
$$= \sum_{x_4=0}^{7} \binom{12 - x_4}{2} \cdot \binom{9 - x_4}{2}$$
$$= \boxed{5862}$$

24. Diberikan 2 buah lingkaran yang masing-masing pusatnya adalah O_1 dan O_2 dimana kedua lingkaran tersebut berpotongan di 2 titik berbeda. Misalkan S merupakan salah satu titik postong dari kedua lingkaran tersebut. Misalkan pula AB dan CD terletak pada garis O_1O_2 sehinga AB dan CD masing-masing merupakan diameter dari lingkaran dengan pusat O_1 dan O_2, serta B, C terletak pada segmen O_1O_2. Jika diketahui bahwa $\angle ASD$ dibagi menjadi 3 sudut sama besar oleh garis SB dan garis SC, tentukan nilai dari $\angle O_1SO_2$ adalah….
    A. 30°
    B. 45°
    C. 60°
    D. 90°
    E. 120°

    Jawaban: D

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{\text{(C)}90^\circ}$.



Misalkan $\angle SAB = \alpha$ dan $\angle SDC = \beta$. Serta, misalkan pula titik E terletak pada garisl O_1O_2 sehingga $SE \perp O_1O_2$. Karena AB dan CD masing-masing merupakan diameter, maka $\angle ASB = \angle CSD = 90^\circ$. Sehingga, $\triangle ASB \sim \triangle SEB$ dan $\triangle CSD \sim \triangle CES$. Maka, $\angle ESB = \angle SAB = \alpha$ dan $\angle ESC = \angle SDC = \beta$, akibatnya $\angle CSB = \angle CSE + \angle ESB = \alpha + \beta$.

Karena SC dan SB merupakan trisector dari $\angle ASD$, maka $\angle ASC = \angle CSB = \angle BSD = \alpha + \beta$. Sehingga,

$$\begin{aligned} \angle ASD = 3\angle CSB &= 180^\circ - \angle SAD - \angle SDA \\ \Leftrightarrow 3(\alpha + \beta) &= 180^\circ - \alpha - \beta \\ \Leftrightarrow \alpha + \beta &= 45^\circ \end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} \angle O_1SO_2 &= 180^\circ - \angle SO_1B - \angle SO_2C \\ &= 180^\circ - 2\angle SAB - 2\angle SDC \\ &= 180^\circ - 2\alpha - 2\beta \\ &= 180^\circ - 2 \cdot 45^\circ \\ &= \boxed{90^\circ} \end{aligned}$$

25. Terdapat 5 siswa yang hendak berkonsultasi pelajaran Matematika kepada Pak Anton dan pelajaran Fisika kepada Pak Arifin. Pak Anton dan Pak Arifin hanya memiliki 1 jam waktu luang untuk melayani kosultasi dari kelima siswa tersebut, serta mereka hanya bisa melayani 1 siswa saja setiap saat. Agar adil, setiap siswa diberi waktu 12 menit untuk konsultasi dengan Pak Anton dan Pak Arifin. Banyaknya cara menyusun jadwal konsultasi dari kelima murid tersebut agar setiap siswa dapat berkonsultasi kepada Pak Anton dan Pak Arifin adalah….
    A. 2880
    B. 5280
    C. 5400
    D. 5760
    E. 14400

    Jawaban: B

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{\text{(B) } 5280}$.

Pertama-tama, terdapat $5! = 120$ cara menyusun urutan jadwal konsultasi dengan Pak Anton. Karena seorang siswa tidak mungkin berkonsultasi kepada Pak Anton dan Pak Arifin secara bersamaan, maka susunan jadwal konsultasi dengan Pak Arifin ada sebanyak $5!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 44$ cara. Sehingga, total ada sebanyak $120 \cdot 44 = \boxed{5280}$ cara penyusunan. $\square$