Soal dan Solusi IRC Matematika
Paket Soal untuk Indonesia Bagian Barat
Tingkat Provinsi

1. Jumlah semua bilangan real m sehingga untuk sembarang polinom $f \in \mathbb{R}[x]$, terdapat setidaknya dua buah bilangan real berbeda n sehingga $f(mn) = f(m+n-1)$ adalah….

Jawabannya adalah $\boxed{1}$.
Kita akan buktikan hanya $m = 1$ yang memenuhi.
Untuk $m \neq 1$, ambil polinom $f(x) = x$ untuk sembarang x. Maka, andai ada dua buah bilangan rill berbeda n yang memenuhi untuk sebuah nilai m yang fixed,

$$mn = f(mn) = f(m+n-1) = m+n-1 \Rightarrow (m-1)(n-1) = 0$$

Karena $m \neq 1$, maka haruslah $n = 1$, kontradiksi terhadap fakta bahwa $f(mn) = f(m+n-1)$ untuk dua nilai n yang berbeda.
Untuk $m = 1$, tinjau bahwa $mn = m+n-1$, jadi $f(mn) = f(m+n-1)$ untuk semua $n \in \mathbb{R}$, sehingga kita selesai.

2. Banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan

$x^{2022} - 2018 = 2020y^{2022} + 2020y^{2021} + 2019y$ adalah….

Solusi
Perhatikan bahwa dengan menambahkan 2019 ke kedua ruas, kita dapat

$$\begin{aligned} x^{2022} + 1 &= 2020y^{2022} + 2020y^{2021} + 2019y + 2019 \\ &= (y+1)(2020y^{2021} + 2019) \end{aligned}$$

Dapat dicek bahwa $y = -1$ bukanlah solusi karena ruas kanan bernilai 0 sedangkan ruas kiri pasti bernilai positif. Apabila $y \neq -1$, perhatikan bahwa $2020y^{2021} + 2019 \equiv 3 \pmod 4$ untuk setiap bilangan bulat y. Dengan demikian, terdapat suatu bilangan prima yang bersisa 3 jika dibagi 4. Katakan bilangan ini p.

Sekarang kita akan buktikan bahwa tidak ada solusi untuk persamaan ini. Tinjau bahwa $LHS = x^{2022} + 1$. Akan dibuktikan untuk setiap bilangan prima q yang membagi $x^{2022} + 1$ maka $q \equiv 1 \pmod 4$.

Misal $a = x^{1011}$.Dari fakta bahwa p membagi $x^{2022} + 1$, maka $p \mid a^2 + 1 \Rightarrow p \mid a^4 - 1$. Menurut FLT, $p \mid a^{p-1} - 1$. Oleh karena itu $p \mid a^{FPB(4,p-1)} - 1$.

- $FPB(4, p-1) = 2 \iff p \equiv 3 \pmod 4$ karena $p - 1 = 4k + 2 \equiv 2 \pmod 4$. Namun, ini berarti $p \mid a^2 - 1 \Rightarrow p \mid (a^2+1) - (a^2-1) = 2$. Kontradiksi.
- $FPB(4, p-1) = 4 \iff p \equiv 1 \pmod 4$. Inilah kasus yang tersisa.

Karena $p \equiv 3 \pmod 4$, maka terjadi kontradiksi.
Dengan demikian, banyak solusi persamaan di atas adalah $\boxed{0}$.

3. Diberikan $\mathcal{N}$ himpunan semua fungsi $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sehingga

$$f(n) | \text{KPK}(f(m), m) + \text{FPB}(f(n), n) - m$$

untuk semua bilangan $m, n \in \mathbb{N}$.

Definisikan sebuah bilangan asli n sebagai $k - awaii$ apabila ada fungsi $f \in \mathcal{N}$ sehingga $f(k) = n$. Banyaknya bilangan asli $k \leq 2021$ sehingga banyaknya bilangan $k - awaii$ ganjil adalah….

Catatan: $\text{KPK}(a, b)$ menyatakan bilangan asli terkecil yang habis dibagi oleh a dan b. $\text{FPB}(a, b)$ menyatakan bilangan asli terbesar yang habis membagi a dan b.

Solusi. Misal $P(m, n)$ asersi m dan n ke pernyataan fungsi di atas.
$P(f(n), n)$ berikan $f(n) \mid FPB(f(n), n)$. Dari definisi FPB, kita punya $FPB(f(n), n) \mid f(n)$. Oleh karena itu, $FPB(f(n), n) = f(n)$, atau dengan kata lain, $f(n) \mid n$ untuk semua bilangan asli $n \in \mathbb{N}$.
Banyaknya bilangan k-awaii adalah banyaknya bilangan asli $n = f(k)$ sehingga $f(k) \mid k$.
Dengan kata lain, banyaknya bilangan k-awaii adalah $\tau(k)$.

<u>Claim:</u> $\tau(k)$ bilangan ganjil hanya jika k merupakan bilangan kuadrat

Proof. Misal $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$. Maka,

$$\prod_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1) = \tau(k) = \text{bilangan ganjil}$$

Karena itu $\alpha_i + 1$ merupakan bilangan ganjil untuk setiap i, dan oleh karena itu α_i haruslah genap untuk setiap i, yang merupakan definisi bilangan kuadrat. □

Maka, banyaknya bilangan asli $k \leq 2021$ sehingga banyaknya bilangan k-awaii ganjil adalah banyaknya bilangan kuadrat yang tidak lebih besar dari 2021, yaitu $\lfloor \sqrt{2021} \rfloor = \boxed{44}$.

4. Di suatu alam semesta paralel Wardaya College juga mengadakan IRC seperti di sini, namun pada akhir acara terdapat suatu mesin pengundi spesial yang berisi cukup banyak bola berwarna merah, kuning, dan hijau sehingga untuk setiap warna yang ada, setidaknya terdapat 20 bola berwarna pada mesin tersebut. Pada saat undian, mesin tersebut mengeluarkan tepat 20 bola satu per satu. Namun, mesin tersebut mengalami kerusakan sehingga setiap mesin tersebut mengeluarkan bola merah, bola yang dikeluarkan selanjutnya pasti berwarna hijau. Hal yang serupa terjadi pada bola kuning, sehingga bola yang dikeluarkan selanjutnya berwarna hijau juga. Banyaknya kemungkinan mesin tersebut mengeluarkan 4 bola merah, 13 bola hijau, dan 3 bola kuning adalah….

Solusi

Karena terdapat 4 bola merah dan 3 bola kuning, maka setiap salah satu bola tersebut dikeluarkan, pasti bola berikutnya berwarna hijau. Jadi, kita sudah tahu bahwa akan ada 8 bola hijau yang keluar langsung setelah bola merah/kuning sebelumnya. Tersisa 6 bola hijau.

Sekarang, misalkan kelompok merah-hijau adalah kelompok A, kuning-hijau kelompok B, dan sisanya kelompok C. Kita hanya perlu mencari banyaknya cara menyusun 4A, 3B, dan 6C pada satu baris yaitu

$$\frac{13!}{(4!)(3!)(6!)} = \boxed{60060}.$$

5. Diberikan a, b, c, d bilangan real yang memenuhi

$$\begin{cases} (a+b)^3 + (a+c)^3 + (a+d)^3 + (b+c)^3 + (b+d)^3 + (c+d)^3 = 11880 \\ ab + ac + ad + bc + bd + cd = 101 \end{cases}$$

Apabila nilai maksimum dari $abcd$ dapat dinyatakan sebagai $\frac{1}{36}\left(a\sqrt{6} - b\right)$ dimana a, b bilangan asli yangsaling relatif prima. Nilai $a + b$ adalah….

Solusi.

Jawabannya adalah $\boxed{42523}$.

Klaim 01. $a + b + c + d = 20$.

Proof. Tinjau identitas berikut

$$(a+b)^3 + (a+c)^3 + (a+d)^3 + (b+c)^3 + (b+d)^3 + (c+d)^3 = 3(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

Misalkan $a + b + c + d = S$ dan $ab + ac + ad + bc + bd + cd = T$.

Maka

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a+b+c+d)^2 - 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) = S^2 - 2T = S^2 - 202$$

Oleh karena itu, dari soal,

$$11880 = 3(S^2 - 202)S$$

Kita selesaikan persamaan tersebut, dan dapatkan

$$S^3 - 202S - 3960 = 0$$

Kita dapatkan $S = 20$ merupakan satu-satunya solusi rill dari persamaan tersebut.

WLOG $a > b > c > d$.

Klaim 02. $a \in \left[5 - \frac{7}{2}\sqrt{6}, 5 + \frac{7}{2}\sqrt{6}\right]$.

Proof. Kita punya

$$b + c + d = 20 - a \text{ dan } bc + bd + cd = 101 - a(b + c + d) = 101 - a(20 - a) = 101 - 20a + a^2$$

Sekarang kita punya

$$\begin{aligned}(b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2 &\geq 0\\ b^2 + c^2 + d^2 &\geq bc + bd + cd\\ (b + c + d)^2 &\geq 3(bc + bd + cd)\\ (20 - a)^2 &\geq 3(101 - 20a + a^2)\\ 0 &\geq 2a^2 - 20a - 97\end{aligned}$$

Selesaikan persamaan kuadratik di atas, kita dapatkan

$$5 - \frac{7}{2}\sqrt{6} \leq a \leq 5 + \frac{7}{2}\sqrt{6}$$

Dengan menggunakan ketaksamaan AM-GM

$$\begin{aligned}abcd &= a(bcd)\\ &\leq a\left(\frac{bc + bd + cd}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\\ &\leq a\left(\frac{101 - 20a + a^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

Sekarang kita akan maksimalkan fungsi $f(a) = a\left(\frac{101-20a+a^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ dimana $a \in \left[5 - \frac{7}{2}\sqrt{6}, 5 + \frac{7}{2}\sqrt{6}\right]$.
Turunan kedua fungsi $f(a)$ adalah

$$\frac{4a^3 - 100a^2 + 803a - 2020}{\sqrt{3(a^2 - 20a + 101)}}$$

Maka fungsi $f''(a)$ bernilai 0 di interval $\left(5, \frac{11}{2}\right)$. Maka, kita cukup cek nilai maksimum ketika $a < 5$ dan ketika $a > \frac{11}{2}$, dan karena untuk $a > \frac{11}{2}$, fungsi tersebut konveks, dan karena itu, nilai maksimum berada di ujung interval. Sehingga, nilai maksimum akan berada di $a = 5 + \frac{7}{2}\sqrt{6}$. Cukup dilihat bahwa nilai maksimum fungsi di interval $\left(5 - \frac{7}{2}\sqrt{6}, 5\right)$ lebih kecil dari $f\left(5 + \frac{7}{2}\sqrt{6}\right)$.
Maka nilai maksimum tersebut adalah

$$abcd \leq f\left(5 + \frac{7}{2}\sqrt{6}\right) = \frac{1}{36}\left(13720\sqrt{6} - 28803\right)$$

Karena itu $a = 13720$ dan $b = 28803$, dan $a + b = 42523$. Tinjau bahwa fungsi ini bernilai maksimum di $a = 5 + \frac{7}{2}\sqrt{6}$.

6. Sebuah segitiga ΔABC dengan $AB = 6, BC = 7, CA = 8$ memiliki lingkaran luar Ω. Titik A_1, B_1, C_1 ada pada Ω sehingga $AA_1 \parallel BC,\ BB_1 \parallel CA, CC_1 \parallel AB$. Misalkan B_1C_1 memotong segmen BC di titik F dan BB_1 memotong CC_1 di titik I. Apabila AF dan IH berpotongan di titik J di Ω. Apabila panjang IF dapat dinyatakan dalam $\frac{a}{b}\sqrt{c}$ dimana a, b, c adalah bilangan asli sehingga $FPB(a, b) = 1$ dan c tidak habis dibagi bilangan kuadrat yang lebih besar dari 1. Nilai $a + b + c$ adalah….

Solusi. Jawabannya adalah 81.
Misal M midpoint BC.
Pertama, perhatikan bahwa BB_1, CC_1, AM konkuren karena $ABCI$ jajar genjang.
Kita klaim bahwa J merupakan antipode titik A.
Perhatikan bahwa $J \in IA_1$. Namun, I adalah refleksi A terhadap midpoint BC, sehingga merupakan I merupakan refleksi A_1 terhadap BC, yang mengakibatkan $IA_1 \perp BC$. Namun, karena $AA_1 \parallel BC$, maka $\angle AA_1J = 90^\circ$, membuktikan pernyataan tersebut.
Sekarang, kita akan buktikan bahwa $B_1F = FC_1$ apabila A, F, J kolinear.
Tinjau bahwa dengan angle chasing kita dapatkan A adalah titik tengah busur B_1C_1. Karena J antipode A dan A, F, J kolinear. Maka F midpoint B_1C_1.
Mudah dibuktikan bahwa IF symmedian $\triangle IBC$ sebab IF median $\triangle IB_1C_1$. Sekarang refleksikan F terhadap M dapatkan F'. Karena $ABCI$ jajar genjang, $IF = AF'$, yang dapat dihitung dengan menggunakan Teorema Steward dan Ratio Lemma sebab

$$\frac{BF'}{F'C} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

Maka, dari Teorema Steward, $IF = AF' = \frac{14}{25}\sqrt{42}$.

7. Misal x adalah suatu bilangan kompleks sehingga $x + \frac{1}{x} = 2\cos 4^\circ$. Nilai dari $x^{90} + \frac{1}{x^{90}}$ adalah….

<u>Solusi</u>
Kita akan buktikan bahwa jika $x + \frac{1}{x} = 2\cos(k)$ untuk suatu bilangan real k, maka $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos(nk)$ untuk setiap bilangan asli n.

Bukti. Untuk $n = 1$ jelas berlaku. Untuk $n = 2$,

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 4\cos^2(k) - 2 = 2(2\cos^2(k) - 1) = 2\cos(2k)$$

Misalkan untuk $n = 3, \cdots, p$ pernyataan benar ($p \geq 3$), maka

$$x^p + \frac{1}{x^p} = 2\cos(pk)$$

Untuk $n = p + 1$,

$$\begin{aligned} x^{p+1} + \frac{1}{x^{p+1}} &= (x^p + \frac{1}{x^p})(x + \frac{1}{x}) - (x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}}) \\ &= 2\cos(pk) \cdot 2\cos(k) - 2\cos((p-1)k) \\ &= 4\cos(pk)\cos(k) - 2\cos((p-1)k) \\ &= 2(\cos((p+1)k) + \cancel{\cos((p-1)k)} - \cancel{\cos((p-1)k)}) \\ &= 2\cos((p+1)k) \end{aligned}$$

$\square$

Dengan demikian, $x^{90} + \frac{1}{x^{90}} = 2\cos(360^\circ) = \boxed{2}$

8. Misalkan a, b, c, d adalah empat bilangan real sehingga $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 16$ dan $(a+4)(c+4) = bd$. Apabila selisih dari a dan c adalah 2, maka nilai $(abcd)^2$ adalah….

<u>Solusi</u>
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (a+4)(c+4) &= bd \\ ac + 4a + 4c + 16 &= bd \\ 2ac + 8a + 8c + (16 + 16) &= 2bd \\ 2ac + 8a + 8c + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 16 - 2bd &= 0 \\ (a + c + 4)^2 + (b - d)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Maka, $a + c = -4$ dan $b = d$. Karena $|a - c| = 2$, maka

$$ac = \frac{(a+c)^2 - (a-c)^2}{4} = \frac{16 - 4}{4} = 3$$

dan

$$(a+c)^2 = \cancel{a^2} + 2ac + \cancel{c^2} = 16 = \cancel{a^2} + b^2 + \cancel{c^2} + d^2 \Rightarrow 2ac = b^2 + d^2 = 2b^2 = 2bd \Rightarrow ac = bd = 3$$

Dengan demikian nilai dari $(abcd)^2 = 9^2 = \boxed{81}$.

9. Diberikan sistem persamaan berikut

$$x + y + z = a$$

$$(x-2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$$

Jumlah dari semua nilai a yang mungkin sehingga sistem persamaan di atas memiliki tepat 1 buah solusi (x, y, z) adalah….

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{8}$.

Soal ini bisa diselesaikan dengan 2 cara: 1) Menggunakan diskriminan. 2) Menggunakan vektor dan visualisasi geometri.

Cara 1: (Menggunakan diskriminan)
Kita subtitusi $y = a - x - z$ dari persamaan pertama ke persamaan kedua. Diperoleh

$$\begin{aligned}&(x-2)^2 + (a-x-z)^2 + (z-2)^2 = 1\\ \Leftrightarrow &2x^2 - 2ax + 2xz - 4x + a^2 - 2az + 2z^2 - 4z + 8 = 1\\ \Leftrightarrow &2x^2 + (-2a + 2z - 4)x + a^2 - 2az + 2z^2 - 4z + 7 = 0\end{aligned}$$

Supaya meliki tepat 1 solusi (x, y, z), maka persamaan kuadrat dalam x di atas harus memiliki diskriminan yang bernilai 0.

$$\begin{aligned}D =&(-2a + 2z - 4)^2 - 4(2)(a^2 - 2az + 2z^2 - 4z + 7) = 0\\ \Leftrightarrow &-3z^2 + 2az + 4z - a^2 + 4a - 10 = 0\\ \Leftrightarrow &3z^2 - (2a + 4)z + a^2 - 4a + 10 = 0\end{aligned}$$

Dengan alasan sama, supaya meliki tepat 1 solusi (x, y, z), maka persamaan kuadrat dalam z di atas harus memiliki diskriminan yang bernilai 0.

$$\begin{aligned}D =&(2a + 4)^2 - 4(3)(a^2 - 4a + 10) = 0\\ \Leftrightarrow &-2a^2 + 16a - 26 = 0\\ \Leftrightarrow &a^2 - 8a + 13 = 0\\ \Leftrightarrow &a = 4 \pm \sqrt{3}\end{aligned}$$

Jadi, nilai a yang mungkin adalah $a = 4 + \sqrt{3}$ dan $a = 4 - \sqrt{3}$. Sehingga, jawabannya adalah $\boxed{8}$. (Catatan: jika ragu dengan jawabannya, bisa dicek dengan cara subtitusi nilai a ke persamaan kuadrat yang diperoleh.)

Cara 2: (Menggunakan vektor dan visualisasi geometri)

Persamaan $x+y+z=a$ merupakan sebuah bidang dengan unit vektor normal $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Sedangkan persamaan $(x-2)^2+y^2+(z-2)^2=1$ merupakan sebuah bola berjari-jari 1 dan berpusat di $(2,0,2)$.

Agar diperoleh tepat 1 solusi (x,y,z), maka bidang $x+y+z=a$ harus bersinggungan dengan bola $(x-2)^2+y^2+(z-2)^2=1$. Kita bisa cari titik singgung yang mungkin dengan cara membuat garis l yang tegak lurus dengan bidang $x+y+z=a$ dan melalui titik pusat bola di $(2,0,2)$. Maka, persamaan garis l adalah

$$l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\quad\text{untuk setiap }\lambda\in\mathbb{R}$$

Sekarang, kita cari nilai dari λ sehingga garis l memotong bola $(x-2)^2+y^2+(z-2)^2=1$. Subtitusi $x=\lambda+2, y=\lambda, z=\lambda+2$ ke persamaan bola, diperoleh

$$\lambda^2+\lambda^2+\lambda^2=1$$
$$\Leftrightarrow\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Sehingga, titik singgung yang mungkin adalah $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+2,\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}+2\right)$ dan $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}+2,-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}+2\right)$. Dari sini, kita dengan mudah mendapatkan nilai dari a. Nilai a yang mungkin adalah $a=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+2\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+2\right)=\sqrt{3}+4$ dan $a=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}+2\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}+2\right)=-\sqrt{3}+4$. Jadi, jawabannya adalah $\boxed{8}$. □

10. Diberikan sebuah segitiga ΔABC dengan lingkaran luar ω dan $\angle ACB=74°$. Apabila garis singgung ω di titik A memotong BC di titik D dan garis singgung ω di titik B memotong AC di titik E dan ABDE siklis. Besar sudut $\angle BAC$ adalah….

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{53°}$.
Tinjau bahwa $\triangle DAC\sim\triangle EBC$ dan $\angle DAB=\angle EBA$, oleh karena itu, kita dapatkan $\angle CAB=\angle ABC$. Sehingga $\triangle ABC$ segitiga sama kaki. Maka, $\angle BAC=53°$.

11. Untuk suatu bilangan asli n, definisikan $f(n)$ sebagai bilangan bulat yang diperoleh apabila digit-digit n dituliskan secara terbalik. Sebagai contohnya,

$f(137002)=200731$. Definisikan sebuah barisan $a_0=1$ dan $a_{i+1}=11a_i$ atau $f(a_i)$ untuk setiap $i\geq 0$. Banyaknya nilai yang mungkin untuk a_6 adalah….

Solusi. $\boxed{8}$.
Caranya adalah dengan kuli kasus.
Kita mungkin mendapatkan:

$$1, 11, 121, 1331, 14641, 161051, 150161, 1771651$$

Untuk 11^k dimana $k \leq 6$ jelas bahwa semuanya dapat tercapai. Untuk 150161, gunakan langkah terakhir dengan membalikkan digit-digitnya.

12. Jika nilai dari $\sum_{k=0}^{2021} \frac{(-1)^k \binom{2021}{k}}{k^4+14k^3+71k^2+154k+120}$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+6}$ untuk suatu bilangan asli a, maka nilai a adalah….

Solusi
Kita dapat faktoriasi bagian penyebut menjadi

$$\sum_{k=0}^{2021} \frac{(-1)^k \binom{2021}{k}}{(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2021} \frac{(-1)^k \binom{2021}{k}}{(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)} &= \sum_{k=0}^{2021} \frac{(-1)^k 2021!}{(2021-k)! \cdot k! \cdot (k+2)(k+3)(k+4)(k+5)} \\
&= \sum_{k=0}^{2021} \frac{(-1)^k 2021!(k+1)}{(2021-k)! \cdot k! \cdot (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)} \\
&= \sum_{k=0}^{2021} \frac{(-1)^k 2021!(k+1)}{(2021-k)!(k+5)!} \\
&= \frac{1}{2022 \cdot 2023 \cdot 2024 \cdot 2025 \cdot 2026} \sum_{k=0}^{2021} \frac{(-1)^k (k+1) \cdot 2026!}{(2021-k)!(k+5)!} \\
&= \frac{1}{2022 \cdot 2023 \cdot 2024 \cdot 2025 \cdot 2026} \sum_{k=0}^{2021} (-1)^k (k+1) \cdot \binom{2026}{k+5} \\
&= \frac{1}{2022 \cdot 2023 \cdot 2024 \cdot 2025 \cdot 2026} \sum_{k=5}^{2026} (-1)^{k-5} (k-4) \cdot \binom{2026}{k} \\
&= \frac{\sum_{k=5}^{2026} (-1)^{k-5} k \cdot \binom{2026}{k} - 4\sum_{k=5}^{2026} (-1)^{k-5} \binom{2026}{k}}{2022 \cdot 2023 \cdot 2024 \cdot 2025 \cdot 2026}
\end{aligned}$$

Kita akan gunakan fakta bahwa $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, lalu kita dapat lanjutkan perhitungan di atas.

Bukti. Banyak cara memilih k orang dan menunjuk salah satu diantaranya menjadi ketua dapat dilihat dari dua sudut pandang.

- Pilih k orang dulu, ada $\binom{n}{k}$ cara. Dari k orang tersebut, pilih satu ketua, ada k cara, Totalnya $k\binom{n}{k}$ cara.
- Pilih ketua dulu, ada n cara. Pilih $k-1$ orang lagi dari sisa $n-1$ orang, $\binom{n-1}{k-1}$ cara. Totalnya $n\binom{n-1}{k-1}$.

Jadi, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. □

Kita lanjutkan perhitungan di halaman berikutnya.

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
\frac{\sum\limits_{k=5}^{2026}(-1)^{k-5}\boxed{k\cdot\binom{2026}{k}} - 4\sum\limits_{k=5}^{2026}(-1)^{k-5}\binom{2026}{k}}{2022\cdot 2023\cdot 2024\cdot 2025\cdot 2026} &= \frac{\sum\limits_{k=5}^{2026}(-1)^{k-5}\cdot\boxed{2026\cdot\binom{2025}{k-1}} - 4\sum\limits_{k=5}^{2026}(-1)^{k-5}\binom{2026}{k}}{2022\cdot 2023\cdot 2024\cdot 2025\cdot 2026} \\
&= \frac{\sum\limits_{k=5}^{2026}(-1)^{k-5}\binom{2025}{k-1}}{2022\cdot 2023\cdot 2024\cdot 2025} - \frac{4\sum\limits_{k=5}^{2026}(-1)^{k-5}\binom{2026}{k}}{2022\cdot 2023\cdot 2024\cdot 2025\cdot 2026} \\
&= -\frac{\sum\limits_{k=5}^{2026}(-1)^{k}\binom{2025}{k-1}}{2022\cdot 2023\cdot 2024\cdot 2025} + \frac{4\sum\limits_{k=5}^{2026}(-1)^{k}\binom{2026}{k}}{2022\cdot 2023\cdot 2024\cdot 2025\cdot 2026} \\
&= \frac{\sum\limits_{k=4}^{2025}(-1)^{k}\binom{2025}{k}}{2022\cdot 2023\cdot 2024\cdot 2025} + \frac{4\sum\limits_{k=5}^{2026}(-1)^{k}\binom{2026}{k}}{2022\cdot 2023\cdot 2024\cdot 2025\cdot 2026}
\end{aligned}$$

Gunakan Binomial Newton untuk memanipulasi bentuk sigma di atas, yaitu bentuk

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1+1)^n = 0$$

Jadi,

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{2025}(-1)^k\binom{2025}{k} &= \sum_{k=0}^{2025}(-1)^k\binom{2025}{k} - \sum_{k=0}^{3}(-1)^k\binom{2025}{k}\\ &= -\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\binom{2025}{k}\\ &= -\binom{2025}{0}+\binom{2025}{1}-\binom{2025}{2}+\binom{2025}{3}\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^{2026}(-1)^k\binom{2026}{k} &= \sum_{k=0}^{2026}(-1)^k\binom{2026}{k} - \sum_{k=0}^{4}(-1)^k\binom{2026}{k}\\ &= -\sum_{k=0}^{4}(-1)^k\binom{2026}{k}\\ &= -\binom{2026}{0}+\binom{2026}{1}-\binom{2026}{2}+\binom{2026}{3}-\binom{2026}{4}\end{aligned}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
LHS &= \frac{-\binom{2025}{0}+\binom{2025}{1}-\binom{2025}{2}+\binom{2025}{3}}{2022\cdot 2023\cdot 2024\cdot 2025} + 4\frac{-\binom{2026}{0}+\binom{2026}{1}-\binom{2026}{2}+\binom{2026}{3}-\binom{2026}{4}}{2022\cdot 2023\cdot 2024\cdot 2025\cdot 2026} \\
&= \frac{-1+2025-\frac{2025\cdot 2024}{2}+\frac{2025\cdot 2024\cdot 2023}{6}}{2022\cdot 2023\cdot 2024\cdot 2025} + 4\frac{-1+2026-\frac{2026\cdot 2025}{2}+\frac{2026\cdot 2025\cdot 2024}{6}-\frac{2026\cdot 2025\cdot 2024\cdot 2023}{24}}{2022\cdot 2023\cdot 2024\cdot 2025\cdot 2026} \\
&= \frac{-6+2025\cdot 6-2025\cdot 2024\cdot 3+2025\cdot 2024\cdot 2023}{2022\cdot 2023\cdot 2024\cdot 2025\cdot 6} \\
&\quad + \frac{-24+2026\cdot 24-2026\cdot 2025\cdot 12+2026\cdot 2025\cdot 2024\cdot 4-2026\cdot 2025\cdot 2024\cdot 2023}{2022\cdot 2023\cdot 2024\cdot 2025\cdot 2026\cdot 6} \\
&= \frac{\cancel{2024}\cdot 6-2025\cdot \cancel{2024}\cdot 3+2025\cdot \cancel{2024}\cdot 2023}{2022\cdot 2023\cdot \cancel{2024}\cdot 2025\cdot 6} \\
&\quad + \frac{\cancel{2025}\cdot 24-2026\cdot \cancel{2025}\cdot 12+2026\cdot \cancel{2025}\cdot 2024\cdot 4-2026\cdot \cancel{2025}\cdot 2024\cdot 2023}{2022\cdot 2023\cdot 2024\cdot \cancel{2025}\cdot 2026\cdot 6} \\
&= \frac{6-2025\cdot 3+2025\cdot 2023}{2022\cdot 2023\cdot 2025\cdot 6} \\
&\quad + \frac{24-2026\cdot 12+2026\cdot 2024\cdot 4-2026\cdot 2024\cdot 2023}{2022\cdot 2023\cdot 2024\cdot 2026\cdot 6} \\
&= \frac{-\cancel{2023}\cdot 3+2025\cdot \cancel{2023}}{2022\cdot \cancel{2023}\cdot 2025\cdot 6} \\
&\quad + \frac{-\cancel{2024}\cdot 12+2026\cdot \cancel{2024}\cdot 4-2026\cdot \cancel{2024}\cdot 2023}{2022\cdot 2023\cdot \cancel{2024}\cdot 2026\cdot 6} \\
&= \frac{-3+2025}{2022\cdot 2025\cdot 6} + \frac{-12+2026\cdot 4-2026\cdot 2023}{2022\cdot 2023\cdot 2026\cdot 6} \\
&= \frac{\cancel{2022}}{\cancel{2022}\cdot 2025\cdot 6} + \frac{\cancel{2023}\cdot 4-2026\cdot \cancel{2023}}{2022\cdot \cancel{2023}\cdot 2026\cdot 6} \\
&= \frac{1}{\cdot 2025\cdot 6} + \frac{4-2026}{2022\cdot 2026\cdot 6} \\
&= \frac{1}{12150} - \frac{\cancel{2022}}{\cancel{2022}\cdot 2026\cdot 6} \\
&= \frac{1}{12150} - \frac{1}{2026\cdot 6} \\
&= \frac{1}{12150} - \frac{1}{12156}
\end{aligned}$$

Jadi, nilai dari a adalah $\boxed{12150}$.

13. Seekor laba-laba memiliki 8 kaki yang terdiri dari 4 kaki kiri dan 4 kaki kanan. Laba-laba tersebut ingin memasang kaus kaki dan sepatu pada setiap kakinya. Kaus kaki harus dipasang terlebih dahulu sebelum sepatu. Apabila diketahui bahwa si laba-laba telah memasang kaus kaki pada keempat kaki kirinya, maka banyaknya cara si laba-laba memasang kaus kaki dan sepatu yang tersisa adalah….

Solusi. Kita beri nomor 1 hingga 4 pada kaki kiri laba-laba dan nomor 5 hingga 8 pada kaki kanan laba-laba. Kita tulis barisan nomor dari kaki laba-laba yang menyatakan urutan pemasangan kaus kaki/sepatu pada kaki laba-laba sesuai dengan nomor pada kaki laba-laba. (Misalnya, jika laba-laba memasang sepatu di kaki nomor 1, tulus angka 1. Jika memasang sepatu pada kaki nomor 7, tulis nomor 7.)

Karena si laba-laba telah memakai kaus kaki pada keempat kaki kirinya, maka terdapat 1 buah masing-masing angka 1,2,3,4 dan 2 buah masing-masing angka 5,6,7,8 pada barisan angka yang kita tulis bagaimanapun urutan pemasangan kaus kaki dan sepatu. Jawaban dari soal ini equivalen dengan banyaknya cara menyusun angka-angka 1,2,3,4,5,5,6,6,7,7,8,8. Banyaknya cara menyusun angka-angka 1,2,3,4,5,5,6,6,7,7,8,8 ada sebanyak $\frac{12!}{(2!)^4} = \frac{12!}{16}$.

Jadi, terdapat $\boxed{\frac{12!}{16}}$ cara untuk si laba-laba memasang 4 kaus kaki dan 8 sepatu. □

14. Diberikan

$A = \sum_{k=1}^{2021} k! \cdot (k^2 + 1).$

Nilai dari $\left\{\frac{A}{2021!}\right\} \cdot 2021!$ adalah….

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{0}$.

Perhatikan bahwa

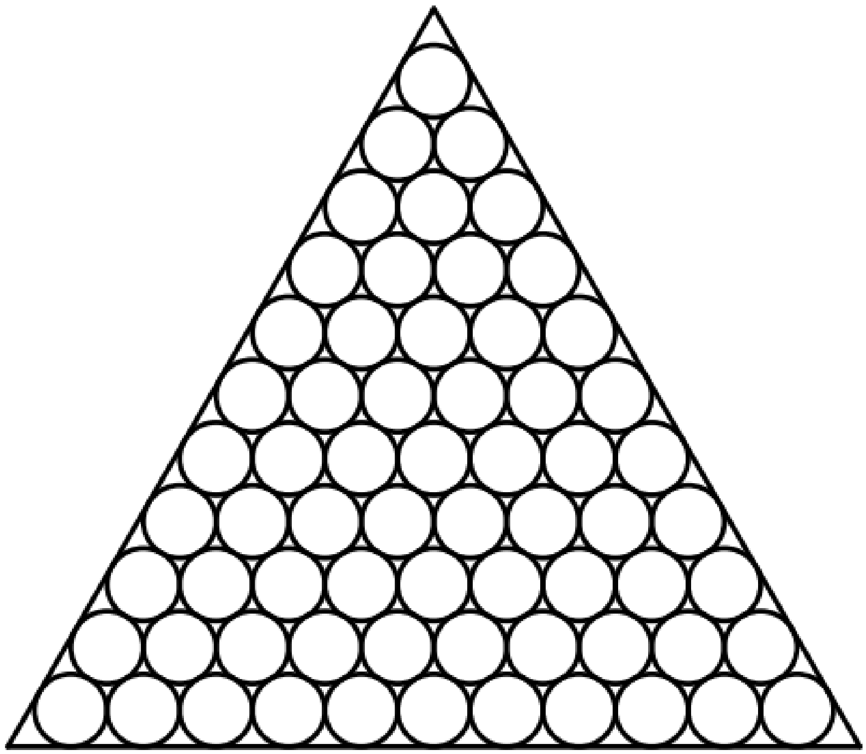
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2021} k! \cdot (k^2+1) &= \sum_{k=1}^{2021} k! \cdot (k^2 + 3k + 2 - 3(k+1) + 2) \\ &= \sum_{k=1}^{2021} (k+2)! - 3 \cdot (k+1)! + 2 \cdot k! \\ &= 2023! - 3 \cdot 2022! + 2022! + 2 \cdot 2! - 3 \cdot 2! + 2 \cdot 1! \\ &= (2023 - 3 + 2) \cdot 2022! = 2021cdot2022!\end{aligned}$$

Sehingga, $2021! \mid A$. Maka, $\left\{\frac{A}{2021!}\right\} \cdot 2021! = \boxed{0}$.

15. Diberikan sebuah prisma segitiga sama sisi dengan panjang sisi dari alas segitiga sama sisi $10 + \sqrt{3}$ satuan panjang. Tinggi prisma segitiga sama sisi adalah 10 satuan panjang. Berapa banyak maksimal bola berdiameter 1 satuan panjang yang dapat dimasukan ke dalam prisma segitiga sama sisi tersebut?

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{726}$.

Untuk memaksimalkan banyak bola, kita masukan bola semaksimal mungkin untuk lapisan pertama dari tumpukan bola. Lapisan pertama maksimal memiliki 66 bola. Penyusunan 66 bola apabila dilihat dari atas akan terlihat sperti gambar di bawah ini.



Untuk lapisan di atas lapisan pertama, terdapat 2 opsi:

1. Letakkan lagi 66 bola dengan susuan sama persis dengan lapisan pertama.
2. Untuk setiap 3 bola pada lapisan pertama yang saling bersinggungan, letakkan sebuah bola di atas ketiga bola tersebut sehingga bola yang baru dilekkan menyinggung 3 ketiga bola yang ada di lapisan pertama. (Total ada 55 bola.)

Perhatikan bahwa, untuk opsi 1), tinggi dari 2 lapisan bola adalah 2 satuan panjang. Sedangkan untuk opsi 2), tinggi dari 2 lapisan bola adalah $1+\sqrt{\frac{2}{3}}$ satuan panjang $\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}<2\right)$. Nilai $\sqrt{\frac{2}{3}}$ merupakan jarak vertikal antara titik pusat bola pada lapisan pertama dengan titik pusat bola pada lapisan kedua. Nilai ini diperoleh dengan cara menghitung tinggi dari piramid segitiga sama sisi dengan panjang rusuk 1 satuan untuk semua rusuknya.

Jika ditinjau dari banyak bola per 1 unit tinggi, opsi 1) memiliki $\frac{66+66}{2}=66$ bola per unit tinggi. Sedangkan opsi 2) memiliki $\frac{66+55}{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}=66.61>66$ bola per unit tinggi. Dari sini, kita bisa simpulkan bahwa opsi 2 memaksimalkan banyak bola yang dapat dimasukkan.

Dengan menggunakan opsi 2), letakkan $66 + 55 = 121$ bola dengan susunan seperti opsi 2) di atas lapisan kedua sehingga sekarang terdapat 4 lapisan bola. Di sini, setiap bola yang ada di lapisan kedua menyinggung tepat 3 bola yang ada di lapisan ketiga. Sehingga, total tinggi dari 4 lapisan bola tersebut adalah $1 + 3\sqrt{\frac{2}{3}}$. Lalu, dengan induksi melihat pola, untuk susunan dengan n lapisan bola, tinggi dari n lapisan bola adalah $1 + (n-1) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Sekarang, kita cari nilai maksimal dari n supaya n lapis bola dapat masuk ke prisma segitiga sama sisi yang tertera pada soal. Maka,

$$1 + (n-1) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \leq 10$$

$$\Leftrightarrow n \leq 1 + 9 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = 1 + \sqrt{\frac{243}{2}} = 1 + \sqrt{11^2 + \frac{1}{2}}$$

Dari sini, bisa kita simpulkan bahwa n maksimal adlaah 12. Jadi, banyak bola maksimal yang kita bisa masukan adalah $\frac{66+55}{2} \cdot 12 = \boxed{726}$.

Catatan: Apabila kita gunakan opsi 1) terus menerus, kita hanya bisa mendapatkan maksimal $66 \cdot 10 = 660$ (< 726) bola saja. $\square$

16. Kurumi menuliskan sebuah polinom $3x^2 + 1$ di kertasnya. Tiap putaran, dia menghapus polinom $p(x)$ di kertas dan mengubahnya menjadi polinom $p(x+1)$ ataupun polinom $x^2 p\left(\frac{1}{x}\right)$. Banyaknya bilangan bulat n sehingga Kurumi suatu saat dapat menuliskan polinom $x^2 + nx + 4$ di kertasnya adalah….

Solusi. Perhatikan bahwa

$$3x^2 + 1 \mapsto x^2 + 3 \mapsto (x+1)^2 + 3 = x^2 + 2x + 4$$

Sehingga $n = 2$ bisa. Akan dibuktikan bahwa tidak ada $n \in \mathbb{Z}$ lain yang bisa.
Tinjau bahwa selama proses berlangsung, diskriminan persamaan kuadrat merupakan sebuah invarian. Maka

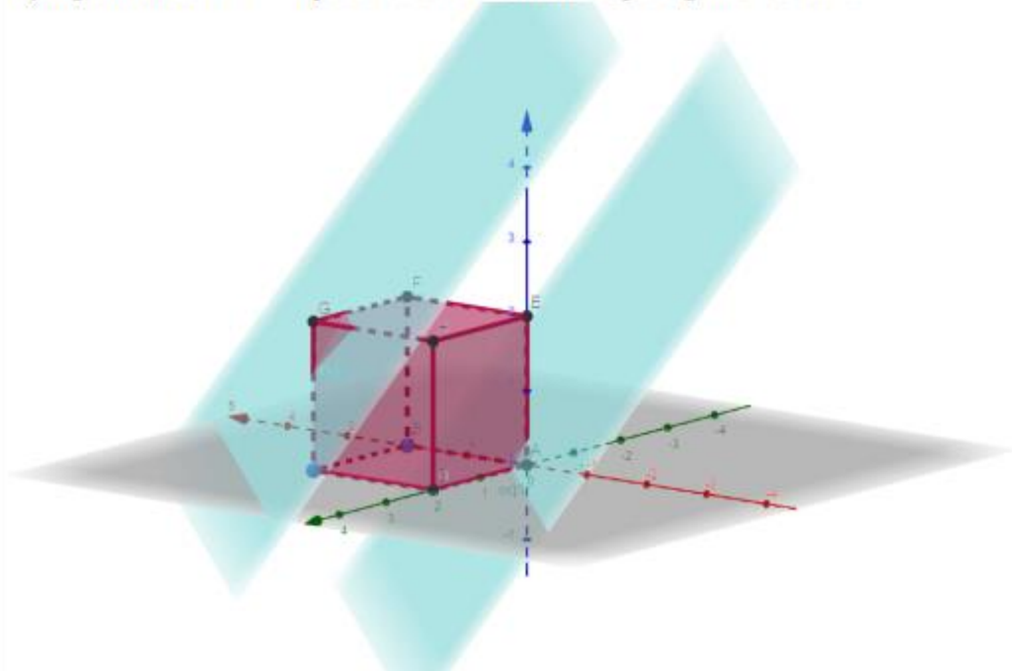
$$n^2 - 16 = -12 \Rightarrow n^2 = 4$$

Sehingga $n = 2$ atau $n = -2$.
Terlebih lagi, tinjau bahwa koefisien x selama proses berlangsung tidak akan berkurang karena kita mulai dengan sebuah polinom dengan koefisien nonnegatif.

17. Russell, Valen, dan William masing-masing memilih suatu bilangan real acak dari interval $[0,2]$. Apabila peluang bahwa jumlah dari ketiga bilangan ini terletak diantara $\frac{1}{3}$ dan $\frac{16}{3}$ adalah $\frac{a}{b}$ dimana $FPB(a,b) = 1$, maka nilai dari $a + b$ adalah….

Solusi

Bayangkan kubus $2 \times 2 \times 2$ pada koordinat Cartesius seperti gambar di bawah



Perhatikan kita dapat memisalkan bilangan-bilangan yang dipilih Russell, Valen, dan William dengan titik (x, y, z) pada gambar di atas. Kedua bidang yang digambar di atas adalah persamaan garis $x + y + z = \frac{1}{3}$ dan $x + y + z = \frac{16}{3}$. Jadi, cukup mencari perbandingan volume irisan kubus terhadap dua bidang itu dengan volume kubus itu sendiri.

Perhatikan bahwa terdapat dua limas segitiga kecil di luar irisan kubus tersebut. Kita cukup menghitung volume kedua limas tersebut lalu mengurangkannya dari volume kubus yaitu 8.

Pada limas atas, koordinat titik-titik sudutnya adalah $(2, 2, 2), (2, 2, \frac{4}{3}), (2, \frac{4}{3}, 2), (\frac{4}{3}, 2, 2)$. Jadi, tinggi limas itu adalah $\frac{2}{3}$ dan luas alasnya adalah $\frac{1}{2} \times (\frac{2}{3})^2 = \frac{2}{9}$. Dengan demikian, volume limas tersebut adalah

$$V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{81}$$

Perhatikan juga bahwa limas bawah memiliki dimensi yang tepat $\frac{1}{2}$ kali dimensi limas atas karena koordinat titik-titik sudutnya adalah $(0, 0, 0), (0, 0, \frac{1}{3}), (0, \frac{1}{3}, 0), (\frac{1}{3}, 0, 0)$. Jadi, volume limas tersebut adalah

$$V_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times V_1 = \frac{1}{8} \times \frac{4}{81} = \frac{1}{162}$$

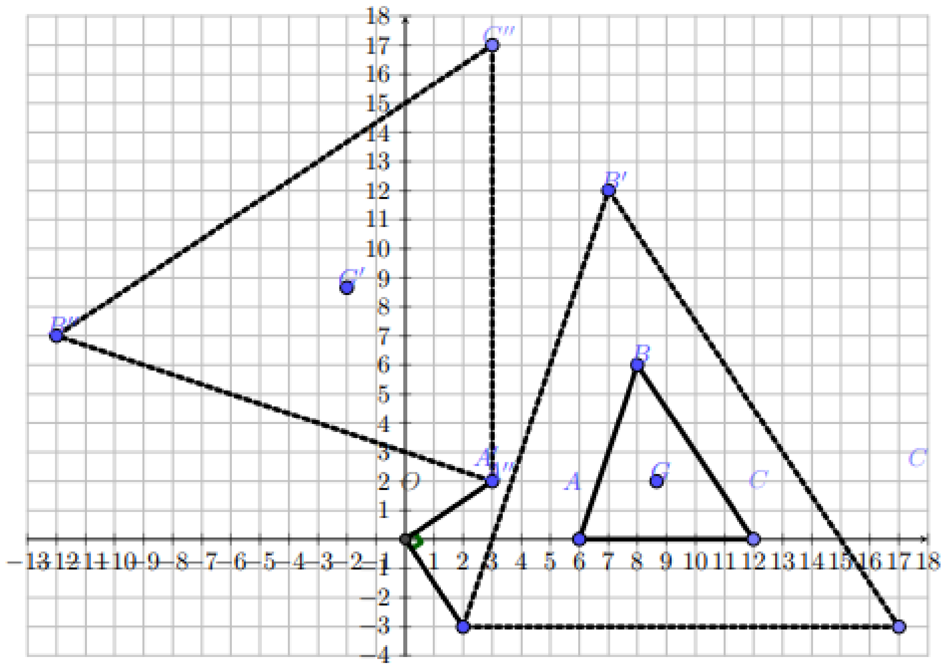
Akhirnya, kita dapat volume irisan yang memenuhi $\frac{1}{3} \le x + y + z \le \frac{16}{3}$ adalah $8 - \frac{4}{81} - \frac{1}{162}$. Jadi, peluang yang ditanya pada soal adalah

$$\frac{8 - \frac{4}{81} - \frac{1}{162}}{8} = \frac{8 - \frac{1}{18}}{8} = \frac{143}{144} \Rightarrow a + b = \boxed{287}.$$

18. Diberikan $A(6,0), B(8,6), C(12,0)$ pada koordinat kartesius. Setelah ΔABC melalui dilatasi dengan faktor $k\ (k > 0)$ dan pusat di titik (x, y) lalu diikuti dengan rotasi sebesar $r°(0° \le r < 360°)$ berlawanan arah jarum jam dengan pusat $(0,0)$, diperoleh titik-titik

$A"(3,2), B"(-12,7), C"(3,1)$. Nilai dari $r + 3x + 3y + 2k$ adalah…. Catatan: Dilatasi merupakan transformasi geometri berupa perkalian yang memperbesar atau memperkecil suatu bangunan geometri. Dalam konsep dilatasi, ada yang disebut titik dilatasi (x, y) dan faktor dilatasi k.

Solusi. Jawabannya adalah $r + 3x + 3y + 2k = 90 + 3\left(\frac{26}{3}\right) + 3(2) + 2\left(\frac{5}{2}\right) = \boxed{127}$.



Perhatikan AC dan $A''C''$, AC merupakan garis horizontal dan $A''C''$ merupakan garis vertikal dengan jarak titik A'' ke $(0,0)$ lebih lekat dibanding dengan jarak titik C'' ke $(0,0)$, maka $\triangle ABC$ dirotasikan sebesar $r = 90$ derajat berlawanan arah jarum jam.

Untuk menentukan fakto dilatasi k, kita bisa cari dengan membandingkan panjang sisi $\triangle ABC$ dengan $\triangle A''B''C''$, sehingga $|k| = \frac{|A''C''|}{|AC|} = \frac{17-2}{12-6} = 2.5$. Karena $k > 0$, maka $k = 2.5$.

Misalkan $G = (x, y)$ adalah pusat dilatasi dari $\triangle ABC$ dan $\triangle A'B'C'$ adalah hasil dilatasi dari $\triangle ABC$. Di sini, koordinat titik G bisa dicari melalui perpotongan dari AA', BB', CC'. Pertama, kita akan meng-undo rotasi dari $\triangle A''B''C''$ untuk mendapatkan koordinat dari A', B', C'. Maka, diperoleh $A'(2,-3), B'(7,12), C'(17,-3)$. Kita gunakan garis AA' dan CC' untuk mendapatkan titik G. Persamaan garis AA' dan CC' adalah sebagai berikut

$$AA' : \frac{x-6}{2-6} = \frac{y-0}{(-3)-0} \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}(x-6)$$
$$CC' : \frac{x-12}{17-12} = \frac{y-0}{(-3)-0} \Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}(x-12)$$

Sehingga, diperoleh $G\left(\frac{26}{3}, 2\right)$. Jadi, $r = 90, x = \frac{26}{3}, y = 2, k = \frac{5}{2}$, sehingga jawabannya adalah $r + 3x + 3y + 2k = 90 + 3\left(\frac{26}{3}\right) + 3(2) + 2\left(\frac{5}{2}\right) = \boxed{127}$. □

19. Yui dan Azunyan akan bermain. Yui memberi tahu Azunyan empat digit terakhir dari suatu bilangan asli 2021 digit berbentuk a^b dimana $a, b \geq 2$. Setelah Azunyan mendengar hal tersebut, Azunyan langsung dapat mengetahui digit terakhir dari a tanpa mengetahui nilai dari b. Jika S menyatakan semua kemungkinan digit terakhir dari a sehingga Azunyan pasti benar, maka jumlah semua elemen dari S adalah….

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{5}$. Akan kita akan buktikan hanya 0 dan 5 yang memiliki sifat demikian. Untuk digit lainnya tinjau bahwa ada nilai a sehingga $a \not\equiv a^b \pmod{10}$.

$$9^2 = 81, 8^3 = 512, 7^3 = 343, 8^2 = 64, 4^2 = 16, 3^3 = 27, 2^3 = 8, 3^2 = 9$$

Kita akan buktikan bahwa apabila $a^b \equiv 5 \pmod{10}$, maka $a \equiv 5 \pmod{10}$. Ini cukup simpel sebab $5 \mid a^b$, yang menyebabkan $5 \mid a$, dan karena $2 \nmid a^b$, maka $2 \nmid a$, sehingga $a \equiv 5 \pmod{10}$.
Apabila $a^b \equiv 0 \pmod{10}$, maka $a^b \equiv 0 \pmod 2$ dan $a^b \equiv 0 \pmod 5$, sehingga $a \equiv 0 \pmod 2$ dan $a \equiv 0 \pmod 5$, yang menyebabkan $a \equiv 0 \pmod{10}$, maka kita selesai.

20. Nilai dari $\sum_{i=1}^{2020} \left\lfloor \frac{2020i}{2021} \right\rfloor$ adalah….

Solusi
Kita akan gunakan proposisi yang menyatakan bahwa $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = 0$ jika x adalah suatu bilangan bulat, selain itu -1.

Perhatikan bahwa karena 2020 dan 2021 relatif prima, maka $\frac{2020i}{2021}$ tidak mungkin merupakan bilangan bulat. Kemudian, perhatikan juga bahwa untuk setiap $1 \leq i \leq 2020$,

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{2020i}{2021} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2020(2021-i)}{2021} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{2020i}{2021} \right\rfloor + \left\lfloor 2020 - \frac{2020i}{2021} \right\rfloor \\
&= 2020 + \left\lfloor \frac{2020i}{2021} \right\rfloor + \left\lfloor -\frac{2020i}{2021} \right\rfloor \\
&= 2019
\end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{2020} \left\lfloor \frac{2020i}{2021} \right\rfloor &= \sum_{i=1}^{2020} \left(\left\lfloor \frac{2020i}{2021} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2020(2021-i)}{2021} \right\rfloor \right) \\
&= \sum_{i=1}^{2020} 2019 \\
&= 2019 \cdot 2020
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{2020} \left\lfloor \frac{2020i}{2021} \right\rfloor = \frac{2019 \cdot 2020}{2} = \boxed{2039190}.$$