Soal dan Solusi IRC Matematika
Paket Soal untuk Indonesia Bagian Timur dan Tengah
Tingkat Kabupaten

1. Misal a, b, c merupakan akar dari persamaan $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$. Nilai dari

   $\left(1 - \frac{1}{(a-1)^2}\right)\left(1 - \frac{1}{(b-1)^2}\right)\left(1 - \frac{1}{(c-1)^2}\right)$ adalah….

   A. -3
   B. 3
   C. 7
   D. -7
   E. 0

   Jawaban: D

   Solusi. Dari Teorema Vieta, $abc = 1$. Perhatikan bahwa $x^3 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Maka

$$\begin{aligned}\prod_{cyc}\left(1 - \frac{1}{(a-1)^2}\right) &= \prod_{cyc}\left(1 - \frac{1}{a^3}\right)\\ &= \prod_{cyc}(a^3 - 1)\\ &= \prod_{cyc}((a-1)^2 - 1)\\ &= \prod_{cyc}(a^2 - 2a)\\ &= \prod_{cyc}(a-2)\\ &= -P(2)\\ &= -7\end{aligned}$$

   dimana $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$.

2. Banyaknya kode 3 digit yang mungkin dibuat Asuna apabila semua digitnya harus berbeda adalah….

   A. 720
   B. 648
   C. 576
   D. 504
   E. 480

   Jawaban: A

   Solusi. Karena banyak digit ada 10, maka banyaknya kode yang mungkin dibuat adalah $10 \times 9 \times 8 = 720$.

3. Banyaknya solusi real berbeda yang mungkin dari persamaan $x^6 + ax^4 + bx^2 + c$ dimana a, b, c adalah permutasi dari $-36, -14$ dan 49 yaitu….
   A. 14
   B. 15
   C. 16
   D. 17
   E. tidak ada solusi

   Jawaban: A

   Solusi
   Misalkan $P(x) = x^6 + ax^4 + bx^2 + c$. Maka $P(1) = P(-1) = 1 + a + b + c$. Karena $a + b + c$ selalu bernilai $-36 - 14 + 49 = -1$ maka $P(1) = P(-1) = 0$. Jadi, $(x^2 - 1)$ selalu merupakan faktor dari $P(x)$. Perhatikan bahwa $(x^2 - 1)(x^4 + (a + 1)x^2 - c) = x^6 + ax^4 - (a + c + 1)x^2 + c = x^6 + ax^4 + bx^2 + c = 0$, maka cukup mencari banyak solusi real berbeda dari $x^4 + (a + 1)x^2 - c = 0$ selain $x = \pm 1$. Persamaan tersebut memiliki kemungkinan-kemungkinan berikut :

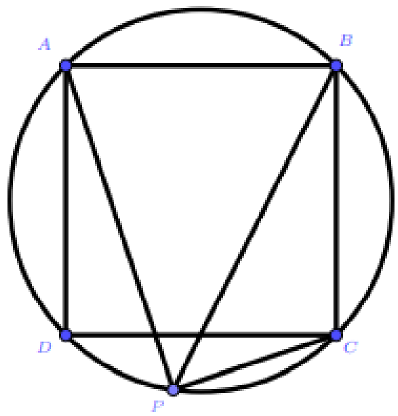
   - $x^4 + 50x^2 + 36 = 0$ tidak punya solusi real sebab definit positif
   - $x^4 + 50x^2 + 14 = 0$ tidak punya solusi real sebab definit positif
   - $x^4 - 35x^2 - 49 = 0$ punya 2 solusi real sebab x^2 dapat bernilai positif atau negatif, kita ambil yang positif
   - $x^4 - 35x^2 + 14 = 0$ punya 4 solusi real sebab x^2 yang mungkin keduanya bernilai positif
   - $x^4 - 13x^2 - 49 = 0$ punya 2 solusi real sebab x^2 yang mungkin dapat bernilai positif atau negatif
   - $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ punya 4 solusi real sebab x^2 yang mungkin keduanya bernilai positif.
   - Jelas bahwa setiap persamaan $x^2 = c$ dimana c positif memiliki 2 akar dan akar-akar dari keenam persamaan tersebut berbeda semua.

   Jadi, banyak solusi real adalah $2 + 4 + 2 + 4 + 2 = \boxed{14}$.

4. Diberikan sebuah persegi $ABCD$. Dikonstruksikan lingkaran luar dari $ABCD$, titik P terletak pada CD. Nilai dari $\frac{PA+PC}{PB}$ adalah….
   A. $\frac{1}{2}$
   B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
   C. 1
   D. $\sqrt{2}$
   E. 2

   Jawaban: D

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{\text{(C)}\sqrt{2}}$



Misalkan s adalah panjang sisi segitiga $ABCD$. Kita langsung gunakan dalil Ptolemy pada segiempat siklis $ABCP$, sehingga diperoleh

$$PA \cdot BC + PC \cdot AB = PB \cdot AC$$
$$\Leftrightarrow PA \cdot s + PC \cdot s = PB \cdot s\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{PA + PC}{PB} = \boxed{\sqrt{2}}$$

5. Jika $\log_2 x = \frac{2}{3}$, $\log_3 y = \frac{4}{5}$, $\log_4 z = \frac{1}{7}$ dan $x = \sqrt{y}$. Berapa nilai dari $\log_{12} xyz$?
   A. $\frac{84}{105}$
   B. $\frac{31}{1001}$
   C. $\frac{579}{1001}$
   D. $\frac{8}{105}$
   E. $\frac{169}{106}$

   Jawaban: C

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{\text{(C)}\,\frac{579}{1001}}$.

Pertama, kita hitung dulu $\log_3 x$ dan $\log_3 z$ karena akan digunakan nantinya.

$$\log_3 x = \log_3 \sqrt{y} = \frac{1}{2}\log_3 y = \frac{2}{5}$$

$$\log_3 z = \log_3 x \cdot \log_x z = \log_3 x \cdot \frac{\log_2 z}{\log_2 x} = \log_3 x \cdot \frac{2\log_4 z}{\log_2 x} = \left(\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{\frac{1}{14}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{70}$$

Sekarang, kita hitung jawabannya

$$\begin{aligned}\log_{12} xyz &= \log_{12} x + \log_{12} y + \log_{12} z\\ &= \frac{1}{2\log_x 2 + \log_x 3} + \frac{2}{2\log_x 2 + \log_x 3} + \frac{1}{\log_z 4 + \log_z 3}\\ &= \frac{3}{2\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{5}{2}} + \frac{1}{7 + \frac{70}{3}}\\ &= \frac{6}{11} + \frac{3}{91}\\ &= \boxed{\frac{579}{1001}}\end{aligned}$$

6. Banyaknya cara Valen dapat menyusun 3 soal sedang dan 2 soal mudah dalam suatu ujian sehingga tidak ada soal mudah setelah suatu soal sedang dan tidak ada soal sedang sebelum suatu soal mudah adalah….
   A. 2
   B. 5
   C. 6
   D. 12
   E. 120

   Jawaban: D

   Solusi
   Pernyataan di atas sama dengan banyaknya menyusun 3 soal sedang dan 2 soal mudah sehingga soal mudah selalu bersamaan dan soal sedang selalu bersamaan dan soal mudah sebelum soal sedang, yaitu (MMSSS)

$$2! \times 3! = \boxed{12}$$

7. Diberikan p $x, y \in \mathbb{R}^+$ yang memenuhi sistem persamaan berikut

$$\frac{4}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 8(y^4 - x^4)$$

$$2x - y = x^4 - y^4$$

   Nilai dari $\lfloor x - y \rfloor$ adalah….

   A. -2
   B. -1
   C. 0
   D. 1
   E. 2

Jawaban: D

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{\text{(C) } 1}$.

Pertama-tama, jika $x = y$, maka tidak ada nilai $x, y \in \mathbb{R}^+$ yang memenuhi. Sehingga, $x \neq y$.

Perhatikan bahwa dengan mengkalikan persamaan pertama dengan x^4, maka diperoleh

$$4x^2 = \frac{x^4}{y^2} + 8x^4(y^4 - x^4) \tag{1}$$

Dari persamaan kedua pada soal, diperoleh

$$4x^2 = (y + x^4 - y^4)^2 = y^2 + 2y(x^4 - y^4) + (x^4 - y^4)^2 \tag{2}$$

Dari (1)-(2), diperoleh

$$\frac{x^4 - y^4}{y^2} - 2y(x^4 - y^4) - (x^4 - y^4)(9x^4 - y^4) = 0 \tag{3}$$

Karena $x \neq y$, kita bisa bagi persamaan (3) dengan $x^4 - y^4$, sehingga diperoleh

$$1 - 2y^3 - y^2(9x^4 - y^4) = 0$$
$$\Leftrightarrow (1 - (y^3 + 3x^2y))(1 - (y^3 - 3x^2y)) = 0$$

Jika $1 - (y^3 - 3x^2y) = 0 \Leftrightarrow 1 = y^3 - 3x^2y$, kita bisa manipulasi persamaan kedua pada soal menjadi

$$2x - (y^3 - 3x^2y)y = x^4 - y^4$$
$$\Leftrightarrow 2x = x^4 - 3x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow 2 = x^3 - 3xy^2$$

Perhatikan bahwa karena $x, y > 0$, maka dari $1 = y^3 - 3x^2y$ diperoleh $y^2 > 3x^2$ dan dari $2 = x^3 - 3xy^2$ diperoleh $x^2 > 3y^2$. Akibatnya $y^2 > 3x^2 > 9y^2$, kontradiksi.

Jika $1 - (y^3 + 3x^2y) = 0 \Leftrightarrow 1 = y^3 + 3x^2y$, kita bisa manipulasi persamaan kedua pada soal dengan cara yang sama menjadi

$$2x - (y^3 + 3x^2y)y = x^4 - y^4$$
$$\Leftrightarrow 2x = x^4 + 3x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow 2 = x^3 + 3xy^2$$

Dari $1 = y^3 + 3x^2y$ dan $2 = x^3 + 3xy^2$, diperoleh

$$3 = 2 + 1 = (x + y)^3$$
$$1 = 2 - 1 = (x - y)^3$$

Sehingga diperoleh

$$(x, y) = \left(\frac{\sqrt[3]{3} + 1}{2}, \frac{\sqrt[3]{3} - 1}{2}\right)$$

Jadi, jawabannya adalah $\boxed{1}$. □

8. Jari-jari lingkaran dalam dari sebuah layang-layang $ABCD$ dengan $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, serta $AB = AD = 30$ dan $bc = cd = 40$ adalah….
   A. $\frac{90}{7}$
   B. $\frac{12}{7}$
   C. $\frac{160}{7}$
   D. 50
   E. 60

   Jawaban: B

   Solusi. Misal lingkaran dalam menyinggung AB dan BC di E dan F dan pusat lingkaran dalam adalah I. Gunakan kesebangunan di $\triangle AEI \sim \triangle ABC$. Apabila jari-jari lingkaran dalamnya adalah r, maka

   $$\frac{30-r}{r} = \frac{30}{40}$$

   Selesaikan persamaan dan kita dapatkan yang kita mau.

   Yaitu: $(30-r)(40) = 30r$

   $120 - 40r = 30r$

   $120 = 70r$

   $r = \frac{12}{7}$

9. Misalkan untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^+$ berlaku persamaan fungsi $f(xy) = yf(x) + xf(y)$ dan $f(2) = 10$. Nilai dari $f(1024)$ adalah….
   A. 100
   B. 5120
   C. 10240
   D. 51200
   E. 10^{10}

   Jawaban: D

   Solusi
   Bagi kedua ruas dengan xy, kita dapat

   $$\frac{f(xy)}{xy} = \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y}$$

   Misal $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, maka

   $$g(xy) = g(x) + g(y) \text{ dan } g(2) = \frac{f(2)}{2} = 5$$

   Perhatikan bahwa

   $$g(1024) = g(512) + g(2) = g(256) + 2g(2) = \cdots = g(4) + 8g(2) = 10g(2) = 50$$

   Jadi, $f(1024) = g(1024) \cdot 1024 = \boxed{51200}$.

10. Misal ABC adalah sebuah segitiga dengan orthocenter H dan titik pusat lingkaran luar O dan titik berat G. Misal titik tengah AH adalah A' dan A'G memotong OM di L dimana M adalah titik tengah BC. Kita tahu bahwa $CL = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$ apabila R merupakan jari-jari lingkaran luar segitiga ABC, maka nilai dari $\frac{BC}{AH}$ adalah….
    A. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
    B. 1
    C. $\sqrt{2}$
    D. 2
    E. 3

    Jawaban: C

    Solusi. Kita klaim bahwa $OL = ML$.
    Namun ini jelas karena (H, I, O) segaris di garis Euler, dan $\frac{HG}{GO} = \frac{2}{1}$. Maka, $OL = LM$ sebab $AH = 2OM$.
    Sekarang, kita tahu

    $$CM^2 + ML^2 = CL^2 = \frac{1}{2}CO^2 = \frac{1}{2}(CM^2 + MO^2)$$

    Karena itu, $CM^2 + ML^2 = \frac{1}{2}(CM^2 + 4ML^2)$, sehingga $CM^2 = 2ML^2$, $CM = ML\sqrt{2}$. Namun,

    $$BC = 2CM = 2ML\sqrt{2} = 2OM\sqrt{2} = AH\sqrt{2}$$

    Maka $\frac{BC}{AH} = \sqrt{2}$.

11. Misalkan $x < y < z$ adalah tiga bilangan bulat sehingga
    $x^2 = yz + 361$ dan $y^2 = xz + 361$
    Jumlah semua nilai z yang mungkin adalah….
    A. 19
    B. 28
    C. 37
    D. 56
    E. 95

    Jawaban: D

Solusi

Kurangi kedua persamaan, maka kita dapat

$$x^2 - y^2 = -z(x-y)$$
$$(x+y)(x-y) = -z(x-y)$$
$$(x+y+z)(x-y) = 0$$

Karena $x \neq y$, maka $x+y+z=0$. Substitusi $z = -(x+y)$ ke salah satu dari kedua persamaan, kita dapat

$$x^2 = -y(x+y) = 361 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 = 361$$

Padahal, dengan menjumlahkan kedua persamaan di awal, kita dapat

$$x^2 + y^2 = (x+y)z + 722 = -z^2 + 722 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 722$$

Dengan demikian, kita sudah mendapatkan fakta bahwa

$$x + y = -z, x^2 + y^2 = 722 - z^2 \Rightarrow xy = \frac{(x+y)^2 - (x^2+y^2)}{2} = z^2 - 361$$

Apabila (x, y, z) merupakan solusi, maka persamaan kuadrat

$$t^2 + zt + (z^2 - 361) = 0$$

haruslah memiliki solusi bulat. Dengan kata lain,

$$D = z^2 - 4(z^2 - 361) = 1444 - 3z^2$$

haruslah merupakan kuadrat sempurna. Perhatikan juga karena

$$x^2 - yz + 361, y^2 - xz + 361, z^2 - xy + 361$$

maka permutasi dari (x, y, z) juga solusi. Kemudian, karena $x+y+z=0$, maka $\max(x,y,z) \geq 0$. Perhatikan juga bahwa apabila (x, y, z) solusi, maka $(-x, -y, -z)$ juga solusi. Dengan demikian kita dapat memasang nilai $z = \max(x,y,z)$ atau $z = \max(-x,-y,-z)$.

Jadi, dengan fakta-fakta ini kita dapat bagi kasus nilai z mulai dari 0.

- $z = 0$. Mudah dilihat bahwa $D = 38^2$. Maka, $t^2 - 361 = (t+19)(t-19) = 0 \Rightarrow \{x, y\} = \{-19, 19\}$. Kita ambil $z = 19$ di kasus ini.
- $z = 1, 2, 3, 4$. Dapat dicek satu per satu bahwa tidak ada nilai z yang memenuhi.
- $z = 5$. Kita dapat $D = 1444 - 75 = 1369 = 37^2$. Maka, $t^2 + 5t - 336 = (t+21)(t-16) = 0 \Rightarrow \{x, y\} = \{-21, 16\}$. Kita ambil $z = 16$ dan $z = 21$ di kasus ini.
- $z = 6, 7, 8, \cdots, 15$. Dapat dicek satu per satu dari nilai $1444 - 3z^2$ dan tidak ada yang merupakan kuadrat sempurna.
- Tidak perlu mengecek lagi untuk $z = 16, 19, 21$ karena sudah ada di kasus sebelumnya.
- $z = 17, 18, 20$. Hal yang sama terjadi, tidak ada solusi yang memenuhi.
- $z \geq 22$. Nilai dari $D = 1444 - 3z^2 < 0$ sehingga persamaan tidak memiliki solusi bulat.

Dengan demikian, jumlah nilai z yang memenuhi adalah $19 + 16 + 21 = \boxed{56}$.

12. Misalkan ABC adalah suatu segitiga dengan $\angle BCA = 60°$. Titik-titik D dan E berturut-turut terletak pada BC dan CA sehingga AD dan BE adalah garis bagi. Apabila panjang AC dan BC berturut-turut adalah 13 dan 14, nilai dari $AE + BD$ adalah….
    A. $\sqrt{182}$
    B. $\sqrt{183}$
    C. 15
    D. $\sqrt{547}$
    E. 27

Jawaban: B

Solusi
Klaim : $AE + BD = AB$.

Bukti :
Buat titik E' pada AB sehingga $AE = AE'$. Jadi, AEE' adalah segitiga sama kaki. Karena AD juga garis bagi segitiga ini, maka $AD \perp EE'$. Misal I adalah perpotongan garis AD dan BE. Karena AI merupakan garis sumbu EE', maka $EI = IE'$. Perhatikan juga bahwa $\angle AIB = 120°$ dengan fakta bahwa $\angle AIB = 180° - \angle ACB$. Jadi, $\angle AIE = \angle DIB = 60° = \angle AIE'$. Dengan demikian, $\angle BIE' = 60°$ juga. Karena $\angle CBE = \angle EBA$, maka $BIE' \cong BID$. Akhirnya, kita dapat $AE + BD = AE' + E'B = AB$.

Cukup dicari panjang dari AB, yang dengan aturan kosinus diperoleh

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos(60°)} = \sqrt{13^2 + 14^2 - 13 \cdot 14} = \boxed{\sqrt{183}}.$$

13. Diberikan bilangan real $a > b > 0$. Nilai minimum dari $a + \frac{64}{(a-b)b^2}$ adalah….
    A. 4
    B. 8
    C. 10
    D. 16
    E. 18

Jawaban: B

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{8}$. Dari ketaksamaan AM-GM, kita punya

$$\begin{aligned} a + \frac{64}{(a-b)b^2} &= (a-b) + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b + \frac{64}{(a-b)b^2} \\ &\geq 4\sqrt[4]{(a-b) \cdot \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{2}b \cdot \frac{64}{(a-b)b^2}} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Kesamaan terjadi ketika $(a, b) = (6, 4)$.

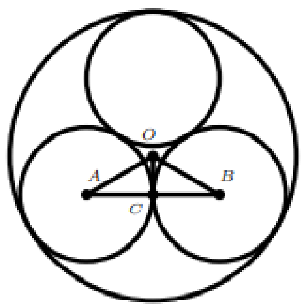
14. Diberikan sebuah tabung dengan jari-jari R dan tinggi h. Tabung tersebut akan dimasukan dengan 3 buah bola berjari-jari r dengan $2r \leq h$ sehingga ketiga bola tersebut saling bersinggungan satu sama lain dan juga bersinggungan dengan selimut tabung. Nilai dari $\frac{R}{r}$ adalah….
    A. $\frac{2\sqrt{3}+6}{3}$
    B. $\frac{\sqrt{3}+2}{3}$
    C. $\frac{\sqrt{3}+3}{3}$

D. $\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$
E. $\frac{\sqrt{3}+6}{3}$

Jawaban: D

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{\text{(D)}\frac{2\sqrt{3}+3}{3}}$.

Penampilan tabung beserta bola akan terlihat seperti gambar berikut jika dilihat dari atas.



Misalkan pusat lingkaran yang merepresentasikan tabung adalah titik O dan titik A, B masing-masing merupakan titik pusat dari 2 buah bola berbeda. Misalkan pula tiitk C adlah titik singgung dari bola-bola dengan pusat A dan B. Maka, $OC \perp AB$.

Di sini, $\angle AOB = 120^\circ$. Karena $OA = OB$ dan $\angle AOB = 120^\circ$, maka $OA = \frac{2}{\sqrt{3}}AC = \frac{2}{\sqrt{3}}r$. Jadi, $R = OA + r = \frac{2}{\sqrt{3}}r + r = \frac{2\sqrt{3}+3}{3}r$. Sehingga diperoleh $\frac{R}{r} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}+3}{3}}$. □

15. Misal $\mathcal{L}_n$ menyatakan bilangan terkecil yang habis dibagi oleh $1, 2, 3, \dots, n$. Sebagai contoh, $\mathcal{L}_n = 26.771.144.400$. Empat digit terakhir dari $\mathcal{L}_n$ adalah….
A. 8800
B. 4400
C. 7600
D. 3200
E. 6400

Jawaban: D

Solusi. Tinjau bahwa $\mathcal{L}_{26} = \mathcal{L}_{25}$ karena $2 \mid L_{25}$ dan $13 \mid L_{25}$, sehingga $26 \mid L_{25}$, dan $\mathcal{L}_{27} = 3 \times \mathcal{L}_{26}$ sebab $9 \mid \mathcal{L}_{26}$ namun $27 \nmid \mathcal{L}_{26}$ dari definisi. Maka,

$$\mathcal{L}_{27} \equiv 3 \times \mathcal{L}_{26} \equiv 3 \times \mathcal{L}_{25} \equiv 3 \times 4.400 = 3.200 \pmod{10.000}$$

16. TikuZ memiliki suatu kotak berisi x bola merah dan y hitam. TikuZ hanya ingat banyaknya bola di kotak itu tidak lebih dari 20. TikuZ mencoba untuk mengambil 2 bola sekaligus dari kotak itu. Apabila peluang TikuZ mendapatkan dua bola berwarna sama adalah $\frac{1}{2}$, banyaknya maksimum bola yang lebih banyak jumlahnya adalah….
A. 6
B. 10
C. 16
D. 18
E. 20

Jawaban: B

Solusi
Ini berarti peluang mendapatkan dua bola berwarna berbeda juga $\frac{1}{2}$. Dengan demikian,

$$\frac{\binom{x}{2}+\binom{y}{2}}{\binom{x+y}{2}} = \frac{xy}{\binom{x+y}{2}} = \frac{1}{2}$$

yang ekuivalen dengan

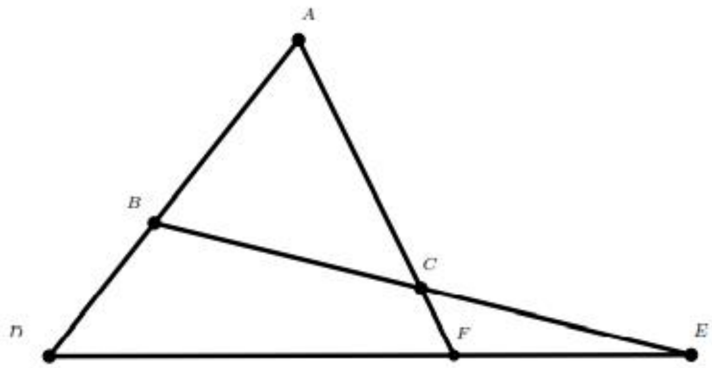
$$\begin{aligned} \binom{x}{2}+\binom{y}{2} &= xy \\ x(x-1)+y(y-1) &= 2xy \\ x^2-2xy+y^2 &= x+y \\ x+y &= (x-y)^2 \end{aligned}$$

Karena $x+y$ adalah bilangan kuadrat dan tidak lebih dari 20, maka $x+y=4,9,16$. Untuk mencari nilai maksimum, maka $x+y=16 \Rightarrow (x-y)^2=16$. WLOG $x \geq y$, maka $x-y=4$, dengan demikian x adalah banyaknya bola yang lebih banyak yaitu $\frac{16+4}{2}=\boxed{10}$.

17. Diberikan sebuah segitiga ABC dengan $AB=10, BC=11, CA=13$. Misalkan titik D, E, F masing-masing terletak pada perpanjangan sinar AB, BC dan AC sehingga titik-titik D, E, F berada di luar segitiga ABC. Jika $AD=20, BE=15, CF=2$, nilai dari $\angle DFE$ adalah….
A. 0°
B. 60°
C. 90°
D. 120°
E. 180°

Jawaban: E

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{\text{(D)}180^\circ}$.



Soal ini dapat diselesaikan dengan mudah menggunakan sifat Meanelaus dengan garis yang tidak melalui segitiga. Dengan meninjau $\triangle ABC$ dan garis D, F, E, kita akan tunjukkan bahwa

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$$

Kita hitung $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA}$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} &= \frac{AD}{AD-AB} \cdot \frac{BE}{BE-BC} \cdot \frac{CF}{AC+CF} \\ &= \frac{20}{20-10} \cdot \frac{15}{15-11} \cdot \frac{2}{13+2} \\ &= \frac{20}{10} \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{2}{15} = 1\end{aligned}$$

Karena $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$, maka D, E, F segaris berdasarkan Meanelaus. Serta, perhatikan bahwa F berada diantara D dan E, maka $\angle DFE = \boxed{180^\circ}$.

18. Banyaknya bilangan asli tidak lebih dari 2021 yang habis dibagi oleh 3, 7, atau 11 adalah….
    A. 950
    B. 969
    C. 977
    D. 1144

    Jawaban: B

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{\text{(B) } 969}$.

Banyaknya bilangan asli tidak lebih dari 2021 yang habis dibagi 3 adalah $\lfloor \frac{2021}{3} \rfloor = 673$.
Banyaknya bilangan asli tidak lebih dari 2021 yang habis dibagi 7 adalah $\lfloor \frac{2021}{7} \rfloor = 288$.
Banyaknya bilangan asli tidak lebih dari 2021 yang habis dibagi 11 adalah $\lfloor \frac{2021}{11} \rfloor = 183$.
Banyaknya bilangan asli tidak lebih dari 2021 yang habis dibagi 3 dan 7 adalah $\lfloor \frac{2021}{3\cdot 7} \rfloor = 96$.
Banyaknya bilangan asli tidak lebih dari 2021 yang habis dibagi 3 dan 11 adalah $\lfloor \frac{2021}{3\cdot 11} \rfloor = 61$.
Banyaknya bilangan asli tidak lebih dari 2021 yang habis dibagi 7 dan 11 adalah $\lfloor \frac{2021}{7\cdot 11} \rfloor = 26$.
Banyaknya bilangan asli tidak lebih dari 2021 yang habis dibagi 3, 7, dan 11 adalah $\lfloor \frac{2021}{3\cdot 7\cdot 11} \rfloor = 8$.

Maka, banyaknya bilangan asli tidak lebih dari 2021 yang habis dibagi 3, 7, atau 11 adalah $673 + 288 + 183 - 96 - 61 - 26 + 8 = \boxed{969}$ □

19. Megumin memiliki 6 buah bilangan di papan tulis: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Dia dapat memilih sembarang 2 bilangan berbeda x dan y di papan tulis dan menukarnya dengan $\frac{xy}{|x-y|}$ dan $\frac{\max\{x,y\}}{2}$. Bilangan mana di bawah ini yang dapat dicapai?
   A. $\frac{2}{5}$
   B. $\frac{15}{4}$
   C. $\frac{23}{4}$
   D. $\frac{11}{3}$
   E. $\frac{19}{3}$

   Jawaban: B

   Solusi.
   Bijeksikan $x \to \frac{60}{x}$. Kita punya bilangan $60, 30, 20, 15, 12, 10$.
   Tinjau bahwa $\sum a$ merupakan sebuah invarian. Oleh karena itu (A) tidak mungkin. Karena proses merubah $(a, b) \to (|a-b|, 2\min\{a, b\})$, maka bilangan yang ada di papan akan tetap merupakan bilangan asli. Namun pemetaan demikian akan membuat opsi C dan opsi D menjadi non asli, sebuah kontradiksi. Cukup dibuktikan bahwa $\frac{15}{4} \to 16$ tercapai. Cukup tinjau:

$$(60, 30, 20, 15, 12, 10) \to (60, 40, 15, 12, 10, 10) \to (60, 40, 20, 15, 10, 2) \to (60, 40, 20, 15, 8, 4)$$

$$\to (80, 20, 20, 15, 8, 4) \to (80, 20, 16, 15, 8, 8)$$

   Maka, kita selesai.

20. Banyaknya bilangan bulat x sehingga $(x+2)(x+4)(x+5)(x+7)$ adalah bilangan kuadrat sempurna adalah….
   A. 0
   B. 4
   C. 8
   D. 16
   E. 18

   Jawaban: B

Solusi

Ekspresi di atas dapat dimanipulasi sebagai berikut.

$$\begin{aligned}(x+2)(x+4)(x+5)(x+7) &= [(x+2)(x+7)][(x+4)(x+5)] \\ &= (x^2+9x+14)(x^2+9x+20)\end{aligned}$$

Misal $u = x^2+9x+17$, maka $(u-3)(u+3)$ merupakan bilangan kuadrat sempurna, katakan m^2. Maka,

$$\begin{aligned}(u-3)(u+3) &= m^2 \\ u^2-9 &= m^2 \\ u^2-m^2 &= 9 \\ (u+m)(u-m) &= 9\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa nilai dari $2u$ yang mungkin adalah $-1-9, -3-3, 3+3, 1+9$ sehingga nilai u adalah $-5, -3, 3, 5$. Kita bagi ke masing-masing kasus.

- $x^2+9x+17 = -5 \Rightarrow x^2+9x+22 = 0$. Diskriminannya adalah $9^2 - 4 \cdot 22 < 0$, jadi tidak ada solusi bulat untuk persamaan ini.
- $x^2+9x+17 = -3 \Rightarrow x^2+9x+20 = 0 \Rightarrow (x+4)(x+5) = 0 \Rightarrow x = -4, x = -5$.
- $x^2+9x+17 = 3 \Rightarrow x^2+9x+14 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+7) = 0 \Rightarrow x = -2, x = -7$.
- $x^2+9x+17 = 5 \Rightarrow x^2+9x+12 = 0$. Diskriminannya adalah $9^2 - 4 \cdot 12 = 33$ bukan merupakan bilangan kuadrat, jadi tidak ada solusi bulat untuk persamaan ini.

Jadi, banyaknya solusi bulat x adalah $\boxed{4}$.

21. Bilangan prima berikut yang merupakan faktor prima dari $2021^8 + 1$ adalah….
    A. 1.353.261.450.127
    B. 1.363.291.800.851
    C. 1.383.091.801.477
    D. 1.393.271.968.961
    E. 1.383.091.800.003

Jawaban: D

Solusi. Tinjau bahwa keempat pilihan tersebut merupakan 7 modulo 8, 3 modulo 8, 5 modulo 8 dan 1 modulo 8.

Akan dibuktikan bahwa apabila $p \mid 2021^8 + 1$, maka $p \equiv 1 \pmod{16} \equiv 1 \pmod 8$. Untuk lihat ini, tinjau bahwa

$$p \mid 2021^8 + 1 \mid 2021^{16} - 1$$

dan

$$p \mid 2021^{p-1} - 1$$

dari Teorema Fermat, maka, $16 \mid o_p(2021)$, sehingga $p - 1 \equiv 0 \pmod{16}$, dengan kata lain, $p \equiv 1 \pmod 8$.

22. Bilangan asli terkecil r sehingga

$$\sum_{s=0}^{s}\left\lfloor\frac{2021+2^{s+1}}{2^{s+2}}\right\rfloor=1010$$

adalah….
A. 7
B. 9
C. 10
D. 11
E. 13

Jawaban: B

Solusi

Dengan **Identitas Hermite**, kita dapat

$$\lfloor x\rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=\lfloor 2x\rfloor$$

yang ekuivalen dengan

$$\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=\lfloor 2x\rfloor-\lfloor x\rfloor$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{r}\left\lfloor\frac{2021+2^{s+1}}{2^{s+2}}\right\rfloor&=\sum_{s=0}^{r}\left\lfloor\frac{2021}{2^{s+2}}+\frac{1}{2}\right\rfloor\\&=\sum_{s=0}^{r}\left\lfloor\frac{2021}{2^{s+1}}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{2021}{2^{s+2}}\right\rfloor\\&=\left\lfloor\frac{2021}{2^{1}}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{2021}{2^{r+2}}\right\rfloor\\&=1010-\left\lfloor\frac{2021}{2^{r+2}}\right\rfloor\end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}\left\lfloor\frac{2021}{2^{r+2}}\right\rfloor&=0\\2^{r+2}&>2021\\r+2&\geq 11\\r&\geq 9\end{aligned}$$

Dengan demikian, nilai terkecil dari r adalah $\boxed{9}$.

23. Bilangan bulat tak-negatif n terkecil sehingga $n!+(n+1)!$ habis dibagi oleh 10^{2021} adalah….
A. 8095
B. 8096
C. 8098
D. 8099
E. 8010

Jawaban: C

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{\text{(B) } 8098}$.

Perhatikan bahwa $n! + (n+1)! = n! \cdot (1 + (n+1)) = (n+2) \cdot n! = \frac{(n+2)!}{n+1}$.

Untuk bilangan bulat $n \geq 10$, dengan permisalan $n! = 2^a \cdot 5^b \cdot c$ dengan $a, b, c \in \mathbb{Z}$ dan c tidak habis dibagi oleh 2 maupun 5, kita punya $a - b \geq \lfloor \frac{10}{2} \rfloor + \lfloor \frac{10}{2^2} \rfloor + \lfloor \frac{10}{2^3} \rfloor - \lfloor \frac{10}{5} \rfloor = 5 + 2 + 1 - 2 = 6$ dan nilai dari $a - b$ akan semakin besar ketika nilai dari n juga meningkat. Dengan ini, kita cukup tinjau banyaknya faktor 5 dari $n!$ atau dengan kata lain nilai dari b.

Selama $5 \nmid n+1$, banyak faktor 5 dari $\frac{(n+2)!}{n+1}$ sama dengan banyak faktor 5 dari $(n+2)!$.

Untuk $n+2 = 8100$, banyak faktor 5 ada sebanyak $\lfloor \frac{8100}{5} \rfloor + \lfloor \frac{8100}{5^2} \rfloor + \lfloor \frac{8100}{5^3} \rfloor + \lfloor \frac{8100}{5^4} \rfloor = 1620 + 324 + 64 + 12 + 2 = 2022$. Maka, $n! + (n+1)!$ habis dibagi oleh 10^{2021}

Untuk $n+2 = 8095$, banyak faktor 5 ada sebanyak $\lfloor \frac{8095}{5} \rfloor + \lfloor \frac{8095}{5^2} \rfloor + \lfloor \frac{8095}{5^3} \rfloor + \lfloor \frac{8095}{5^4} \rfloor = 1619 + 323 + 64 + 12 + 2 = 2020$. Maka, $n! + (n+1)!$ tidak habis dibagi oleh 10^{2021}

Karena $5 \nmid n+1 = 8099$ untuk $n+2 = 8100$, maka kita peroleh jawabannya adalah $n+2 = 8100 \Leftrightarrow \boxed{n = 8098}$.

Catatan: Pengerjaan soal ini harus dengan cara trial & error. □

24. Nilai minimum dari $f(x) = |2x+1| + |2x+3| + |2x+5| + \cdots + |2x+2021|$ adalah….
    A. 0
    B. 511060
    C. 511061
    D. 1022120
    E. 1022121

Jawaban: B

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{\text{(A) } 511060}$.

Misalkan fungsi $g(x) = |2x + 1011 - a| + |2x + 1011 + a|$ untuk $a > 0$.

Ketika $x < \frac{-a-1011}{2}$, $g(x) = -(2x + 1011 - a) - (2x + 1011 + a) = -4x - 2022$.

Ketika $\frac{-a-1011}{2} \leq x \leq \frac{a-1011}{2}$, $g(x) = -(2x + 1011 - a) + (2x + 1011 + a) = 2a$.

Ketika $x > \frac{a-1011}{2}$, $g(x) = (2x + 1011 - a) + (2x + 1011 + a) = 4x + 2022$.

Perhatikan bahwa, $g(x)$ merupakan fungsi turun pada $x < \frac{-a-1011}{2}$, fungsi konstan pada $\frac{-a-1011}{2} \leq x \leq \frac{a-1011}{2}$ dan fungsi naik pada $x > \frac{a-1011}{2}$. Maka, nilai minimum dari $g(x)$ adalah $2a$ terjadi ketika $\frac{-a-1011}{2} \leq x \leq \frac{a-1011}{2}$.

Dengan $a = 2, 4, 6, \ldots, 1010$, maka $f(x) = (|2x+1| + |2x+2021|) + (|2x+3| + |2x+2019|) + \cdots + (|2x+1009| + |2x+1013|) + |2x+1011| \geq 2 \cdot 1010 + 2 \cdot 1008 + 2 \cdot 1006 + \cdots + 2 \cdot 2 + 0 = \boxed{511060}$ dengan kesamaan terjadi ketika $x = -\frac{1011}{2}$. □

25. Diberikan sebuah papan catur 5×5. Anda bebas menaruh satu buah bidak catur berikut di dalam sembarang kotak di dalam papan catur. Sekarang, anda mempunyai 2 putaran untuk menggerakkan bidak catur itu di papan (seperti pada aturan catur pada umumnya). Apabila $\mathcal{A}$ adalah himpunan semua posisi di catur yang mungkin dilewati oleh bidak catur selama 2 putaran tersebut. Manakah dari bidak berikut yang membuat $|\mathcal{A}|$ minimum?
    A. raja (king)
    B. benteng (rook)
    C. menteri (bishop)
    D. kuda (knight)
    E. ratu (queen)

    Jawaban: C

    Solusi.
    Pertama, benteng dapat menjelajahi semua kotak. Misalkan kotak yang ingin dituju (x, y) dan posisi sekarang (a, b). Maka benteng cukup pergi ke kolom x dan baris ke y dalam 2 putaran tersebut.
    Raja juga dapat menjelajahi semua kotak dengan meletakkan raja di pusat papan 5×5.
    Kita pertama akan buktikan bahwa menteri hanya dapat menjelajahi ke maksimal 13 kotak. Perhatikan bahwa gerak dari menteri tidak merubah warna kotak yang dilewatinya. Karena terdapat maksimal $\lceil \frac{25}{2} \rceil =$ 13 persegi yang berwarna sama dengan kotak awal, maka $|\mathcal{A}| \leq 12$.
    Untuk kuda, perhatikan bahwa apabila bidak catur diletakkan di tengah, $|\mathcal{A}| = 17$. Buktinya adalah dengan meninjau bahwa $(x, y) \mapsto (x+2, y-1) \mapsto (x+1, y+1)$. Sekarang, akan dibuktikan bahwa $(x \pm 1, y), (x, y \pm 1)$ tidak dapat dikunjungi. Ini cukup simpel dengan meninjau paritas. Jumlah kedua bobot yang dimiliki catur tiap putaran selalu berganti paritas. Dengan cara yang sama, $(x+2, y+2)$ tidak dapat dicapai sebab apabila dapat tercapai, mereka harus melewati $(x \pm 1, y)$ terlebih dahulu.