Soal dan Solusi IRC Matematika
Paket Soal untuk Indonesia Bagian Barat
Tingkat Provinsi

1. Diberikan $P(x)$ polinom berkoefisien kompleks sehingga

$$P(x^2)P(x+1) = P(x)P(x^2+1)$$

Apabila $P(0) \cdot P(1) = -1$. Nilai dari $\prod_{k=-2020}^{2021} P(k)$ adalah….

Solusi. Tinjau bahwa

$$\frac{P(x+1)}{P(x)} = \frac{P(x^2+1)}{P(x^2)} = \frac{P((-x)^2+1)}{P((-x)^2)} = \frac{P(-x+1)}{P(-x)}$$

Sehingga, kita dapatkan

$$P(x+1)P(-x) = P(x)P(-x+1)$$

untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$. Maka, dengan induksi, kita dapatkan

$$P(x+k)P(-x-k-1) = P(x)P(-x+1) \text{ untuk semua } k \in \mathbb{Z}$$

Sehingga kita simpulkan $P(k) \cdot P(1-k) = P(0) \cdot P(1) = -1$ untuk semua $k \in \mathbb{Z}$.
Maka, dari itu,

$$\prod_{k=-2020}^{2021} P(k) = \prod_{k=-2020}^{0} P(k) \cdot P(1-k) = (-1)^{2021} = \boxed{-1}$$

2. Asleigh, Gelisha, dan Saleigh sedang bermain kartu dimana masing-masing bertaruh x dolar. Dalam permainan ini, siapapun yang memenangkan sebanyak 6 pertandingan terlebih dahulu akan mendapatkan seluruh taruhan tersebut. Diketahui kemampuan bermain mereka bertiga sama, sehingga peluang memenangkan sebuah pertandingan untuk setiap orang pastilah $\frac{1}{3}$. Setelah bermain 10 pertandingan, Asleigh sudah menang 5 kali, Gelisha 3 kali, dan sisanya dimenangkan Saleigh. Namun, mereka memutuskan untuk tidak bermain lagi sehingga uang yang mereka sudah kumpulkan akan didistribusi secara adil ke setiap pemain berdasarkan hasil permainan sementara. Berdasarkan ketentuan demikian, nilai dari x supaya banyak dolar yang harus dibagikan kepada Saleigh adalah 155 dolar, tanpa pembulatan adalah….

Solusi

Kita harus membaginya dengan melihat peluang mereka memenangkan keseluruhan permainan asumsi permainan tidak dihentikan. Karena Saleigh harus menang 2 kali, maka Saleigh dapat menang dalam setidaknya 4 pertandingan tambahan.

- Saleigh menang dalam tepat 4 pertandingan. Peluangnya adalah $(\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81}$.
- Saleigh menang dalam tepat 5 pertandingan. Ini berarti pertandingan kelima dimenangkan oleh Saleigh dan sisanya dimenangkan oleh Saleigh 3 kali saja. Namun, Asleigh tidak boleh menang satupun pertandingan. Peluangnya adalah
$$\binom{4}{3} \cdot (\frac{1}{3})^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{243}$$
- Saleigh menang dalam tepat 6 pertandingan. Ini berarti pertandingan keenam dimenangkan oleh Saleigh dan sisanya dimenangkan oleh Saleigh 3 kali saja. Namun, Asleigh tidak boleh menang satupun pertandingan. Peluangnya adalah
$$\binom{5}{3} \cdot (\frac{1}{3})^3 \cdot (\frac{1}{3})^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{729}$$
- Saleigh tidak mungkin menang dalam 7 pertandingan karena salah satu dari Asleigh dan Gelisha sudah menang 6 kali terlebih dahulu.

Jadi, peluang Saleigh menang diketahui hasil permainan sementara adalah $\frac{1}{81} + \frac{4}{243} + \frac{10}{729} = \frac{9}{729} + \frac{12}{729} + \frac{10}{729} = \frac{31}{729}$.

Dengan demikian, uang yang didapatkan Saleigh adalah $3x \cdot \frac{31}{729} = 155 \Rightarrow x = \boxed{1215}$.

3. Banyaknya bilangan bulat n sehingga $\frac{4n^5+5n^4-19n^3+11n^2+2020n-2021}{4n^2-3n-1}$ merupakan bilangan bulat adalah….

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{3}$.

Perhatikan bahwa

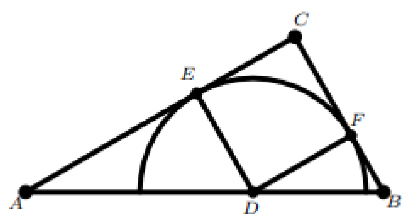
$$\begin{aligned} &\frac{4n^5+5n^4-19n^3+11n^2+2020n-2021}{4n^2-3n-1} \\ =&\frac{((4n+1)(n^3+2n^2-3n+1)+2020)(n-1)}{(4n+1)(n-1)} \\ =&\left((n^3+2n^2-3n+1)+\frac{2020}{4n+1}\right)\cdot\frac{n-1}{n-1} \end{aligned}$$

Agar pecahan pada soal merupakan bilangan bulat, haruslah $(4n+1) \mid 2020$ dan $n \neq 1$. Disini, $n \neq 1$ karena pecahan pada soal akan tak terdefinisi ketika $n = 1$.

Perhatikan pula bahwa $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Faktor dari 2020 (baik positif maupun negatif) yang kongruen 1 modulo 4 adalah 1, 5, 101 dan 505. Maka, diperoleh $4n+1 = 1, 5, 101, 505 \Leftrightarrow n = 0, 1, 25, 126$. Karena $n \neq 1$, maka $n = 0, 25, 126$. Jadi, ada $\boxed{3}$ buah nilai n yang memenuhi. $\square$

4. Diberikan segmen garis AB yang panjangnya 2021. Akan dikonstruksikan sebuah segitiga siku-siku dengan AB sebagai hipotenusanya, kemudian dikonstruksikan setengah lingkaran yang diameternya terletak pada segmen AB dan menyinggung kedua sisi selain sisi AB. Misalkan r adalah jari-jari setengah lingkaran tersebut. Untuk semua segitiga siku-siku yang mungkin, jika nilai maksimum dari r adalah M, maka nilai dari $\lfloor M \rfloor$ adalah….

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{714}$.



Misalkan D adalah titik pusat dari setengah lingkaran dan E, F masing-masing merupakan titik singgung dari setengah lingkaran yang terletak pada AC dan BC. Misalkan $AB = c, BC = a, CA = b$. Karena $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, maka

$$\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{CB} \Leftrightarrow \frac{b-r}{b} = \frac{r}{a} \Leftrightarrow r = \frac{ab}{a+b}$$

Dengan QM-HM,

$$\sqrt{\frac{c^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

Jadi, nilai maksimum dari r adalah $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{c^2}{2}} = \sqrt{\frac{2021^2}{8}}$. Sehingga, $\lfloor M \rfloor = \sqrt{\frac{2021^2}{8}} = \boxed{714}$. □

5. Sebuah bilangan bulat tak-negatif N bersisa 7 ketika dibagi dengan 30, bersisa 3 ketika dibagi dengan 143 dan bersisa 1 ketika dibagi dengan 2021. Tiga digit terakhir dari nilai N terkecil yang memenuhi adalah….

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{347}$.

Kita bisa tulis ulang soal dalam format modulo sebagai berikut

$$N \equiv 7 \pmod{30}$$
$$N \equiv 3 \pmod{143}$$
$$N \equiv 1 \pmod{2021}$$

Dari $N \equiv 7 \pmod{30}$, kita misalkan $N = 30t + 7$ dengan t bilangan bulat tak-negatif. Subtitusi $N = 30t+7$ ke $N \equiv 3 \pmod{143}$, diperoleh

$$\begin{aligned}
30t + 7 &\equiv 3 && \pmod{143} \\
30t &\equiv -4 && \pmod{143} \\
30t &\equiv -4 - 2 \times 143 && \pmod{143} \\
30t &\equiv -290 && \pmod{143} \\
3t &\equiv -29 && \pmod{143} \\
3t &\equiv -29 + 143 && \pmod{143} \\
3t &\equiv 126 && \pmod{143} \\
t &\equiv 42 && \pmod{143}
\end{aligned}$$

Dengan demikian, kita bisa misalkan $t = 143k + 42$ dengan k bilangan bulat tak-negatif. Sehingga, $N = 30 \cdot (143k + 42) + 7 = 4290k + 1447$. Subtitusi $N = 4290k + 1447$ ke $N \equiv 1 \pmod{2021}$, diperoleh

$$\begin{aligned}
4290k + 1447 &\equiv 1 && \pmod{2021} \\
(4290 - 2 \times 2021)k &\equiv -1446 && \pmod{2021} \\
248k &\equiv -1446 && \pmod{2021} \\
124k &\equiv -723 && \pmod{2021} \\
124k &\equiv -723 + 2021 && \pmod{2021} \\
124k &\equiv 1298 && \pmod{2021} \\
62k &\equiv 649 && \pmod{2021} \\
62k &\equiv 649 + 2021 && \pmod{2021} \\
62k &\equiv 2670 && \pmod{2021} \\
31k &\equiv 1335 && \pmod{2021} \\
31k &\equiv 1335 + 10 \times 2021 && \pmod{2021} \\
31k &\equiv (31 \times 43 + 2) + 10 \times (31 \times 65 + 6) && \pmod{2021} \\
31k &\equiv 31 \times (43 + 65) + (2 + 10 \times 6) && \pmod{2021} \\
31k &\equiv 31 \times (43 + 65) + 62 && \pmod{2021} \\
k &\equiv 43 + 65 + 2 && \pmod{2021} \\
k &\equiv 110 && \pmod{2021}
\end{aligned}$$

Dengan demikian, kita bisa misalkan $k = 2021x + 110$ dengan x bilangan bulat tak-negatif. Sehingga, $N = 4290 \cdot (2021x + 110) + 1447 = 8670090x + 473347$. Pilih $x = 0$ untuk mendapatkan N terkecil. Jadi, jawabannya adalah $\boxed{347}$. □

6. Misalkan x, y adalah dua bilangan real positif yang memenuhi

   $xy(x-10)(y+4)+7x(x-10)+28y(y+4)=392.$

   Nilai maksimum $x+y$ tercapai ketika $x=x'$ dan $=y'$. Jika $x'-y'=p+q\sqrt{r}$ untuk p, q, r bilangan bulatdan r tidak habis dibagi oleh bilangan kuadrat lebih besar dari 1, maka nilai dari $p+q+\ r$ adalah….

Solusi

Perhatikan bahwa persamaan di atas dapat dimanipulasi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} xy(x-10)(y+4)+7x(x-10)+28y(y+4)&=392 \\ [x(x-10)][y(y+4]+7[x(x-10)]+28[y(y+4)]+7\cdot 28&=588 \\ [x(x-10)+28][y(y+4)+7]&=588 \\ (x^2-10x+28)(y^2+4y+7)&=588 \\ ((x-5)^2+3)((y+2)^2+3)&=588 \end{aligned}$$

Berdasarkan Cauchy Schwarz,

$$\begin{aligned} ((x-5)^2+3)(3+(y+2)^2) &\geq (\sqrt{3}((x-5)+(y+2)))^2 \\ &= 3((x-5)+(y+2))^2 \\ &= 3(x+y-3)^2 \end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned} 588=((x-5)^2+3)((y+2)^2+3) &\geq 3(x+y-3)^2 \\ x+y-3 &\leq \sqrt{\frac{588}{3}}=14 \\ x+y &\leq 17 \end{aligned}$$

Jadi, nilai maksimum $x+y$ adalah 17.

Nilai maksimum tercapai ketika kesamaan pada Cauchy Schwarz tercapai yaitu ketika

$$\frac{x-5}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{y+2}.$$

Maka, $x' + y' = 17$ jika $(x' - 5)(y' + 2) = 3$. Substitusi $y' = 17 - x'$, maka didapatkan $(x' - 5)(19 - x') = 3 \Rightarrow x'^2 - 24x' + 98 = 0$. Solusi dari persamaan tersebut adalah $x' = 12 \pm \sqrt{46}$. Apabila $x' = 12 + \sqrt{46}$, maka $y' = 5 - \sqrt{46} < 0$. Jadi, $x' = 12 - \sqrt{46}$ dan $y' = 5 + \sqrt{46}$.
Akhirnya, kita dapat

$$x' - y' = 7 - 2\sqrt{46} \Rightarrow p + q + r = 7 - 2 + 46 = \boxed{51}.$$

7. Di dalam sebuah ujian 9 soal, setiap soal ada 2 buah pilihan, benar dan salah. Peluang Kirito menjawab setidaknya 5 soal dengan benar adalah $\frac{a}{b}$ dimana a, b bilangan asli sehingga $FPB(a, b) = 2$. Nilai dari $a + b$ adalah….

Solusi. Perhatikan bahwa peluang Kirito menjawab setidaknya 5 soal dengan benar dan menjawab setidaknya 5 soal dengan salah adalah sama. Karena kedua kejadian itu saling lepas dan gabungan kedua kejadian membentuk semesta, maka peluangnya adalah $\frac{1}{2}$. Maka $a + b = 2(1 + 2) = 6$.

8. ABCD adalah sebuah segiempat konkaf di D sehingga $\angle BCD = 78°$, $\angle BAD = 39°$, dan $BC = CD = DA$. Besar $\angle ABC$ adalah….

Solusi
Cerminkan titik D terhadap sisi AB ke titik D'. Maka, $AD = AD'$ dan AB menjadi garis sumbu $D'D$. Dengan demikian, $D'B = DB$. Tetapi ini mengakibatkan segitiga DAD' kongruen segitiga BCD. Jadi, $D'B = BD = DD'$. Dengan kata lain, BDD' segitiga sama sisi, sehingga $\angle ABD = 30°$. Kemudian, $\angle DBC = \frac{180-78}{2} = 51°$ karena BCD segitiga sama kaki. Akhirnya, kita dapat

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 30° + 51° = \boxed{81°}.$$

9. Misalkan x adalah bilangan real tak nol yang memenuhi $\sqrt[7]{7x^3 + 6x} = \sqrt[3]{\frac{x^7 - 6x}{7}}$. Hasil kali dari semua nilai x yang mungkin adalah….

Solusi
Misalkan

$$\sqrt[7]{7x^3 + 6x} = \sqrt[3]{\frac{x^7 - 6x}{7}} = k$$

Maka,

$$7x^3 + 6x = k^7 \text{ dan } x^7 - 6x = 7k^3$$

Jumlahkan kedua persamaan dan kita dapat

$$x^7 + 7x^3 = k^7 + 7k^3$$

Karena $f(x) = x^7 + 7x^3$ merupakan fungsi monoton naik ($f'(x) = 7x^6 + 21x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$), maka persamaan di atas hanya memiliki satu solusi, yaitu ketika $x = k$. Dengan demikian,

$$x^7 - 6x = 7x^3 \Rightarrow x^7 - 7x^3 - 6x = x(x^2 - 3)(x^2 + 1)(x^2 + 2) = 0$$

Jadi, solusi x yang mungkin hanyalah $x = \pm\sqrt{3}$, berarti hasil kalinya adalah $\boxed{-3}$.

10. Banyaknya cara memilih 3 orang perwakilan untuk lomba IRC dari sekumpulan 10 anak klub dengan catatan salah satu diantara 10 anak sudah pasti terpilih menjadi perwakilan adalah....

Solusi. Kita cukup memilih 2 orang dari 9 orang tersisa, yakni $\binom{9}{2} = \boxed{36}$ cara.

11. $P(x)$ merupakan polinomial kubik dengan koefisien real sehingga $P(x)$ memiliki 3 akar real berbeda. Jika diketahui bahwa
    - $x = 1$ merupakan akar dari P(x)
    - Untuk setiap akar t dari persamaan $P(x) = 0$, kita punya $P(2t) = t$.

    Nilai dari $P(50)$ adalah….

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{20825}$.

Pertama-tama, misalkan $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Dari pernyataan "Untuk setiap akar t dari persamaan $P(x) = 0$, kita punya $P(2t) = t$.", kita bisa simpulkan bahwa $P(2x) - x = 0$ juga memiliki 3 akar real yang sama persis dengan akar-akar $P(x)$. Ini mengimplikasikan bahwa persamaan

$$0 = 8P(x) - (P(2x) - x) = 4bx^2 + (6c + 1)x + 7d$$

memiliki 3 akar real berbeda. Karena $4bx^2 + (6c + 1)x + 7d = 0$ adalah persamaan kuadrat dan memiliki 3 akar real berbeda, maka $4bx^2 + (6c + 1)x + 7d$ harus sama dengan 0 untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, sehingga dengan penyamaan koefisien diperolehh $b = 0, c = -\frac{1}{6}, d = 0$. Lalu, dengan meninjau $P(1) = 0$ karena 1 adalah akar dari $P(x)$, maka

$$\begin{aligned} P(1) &= a + b + c + d = 0 \\ \Leftrightarrow a + 0 + \left(-\frac{1}{6}\right) + 0 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Sehingga, diperoleh $P(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x$. Jadi, $P(50) = \frac{1}{6}(50^3 - 50) = \boxed{20825}$. □

12. Valen sedang bosan mengerjakan soal matematika, sehingga ia memutuskan untuk bermain dadu 4 sisinya (berbentuk limas segitiga). Apabila dalam tiga kali pelemparan dadu diketahui hasil lemparan keduanya adalah bilangan genap. Jika peluang Valen mendapatkan setidaknya satu angka 2 adalah $\frac{a}{b}$ dimana $FPB(a, b) = 1$, maka nilai dari $a^2 + b^2$ adalah….

Solusi

Misalkan A adalah kejadian dimana Valen mendapatkan setidaknya satu angka 2 dan B adalah kejadian hasil lemparan keduanya adalah bilangan genap. Maka (* berarti angka berapapun, G berarti genap)

$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= \frac{|*G*|-|\{1,3,4\}\{4\}\{1,3,4\}|}{4^3} \\ &= \frac{4\cdot 2\cdot 4-3\cdot 1\cdot 3}{4^3} \\ &= \frac{32-9}{4^3} \\ &= \frac{23}{64} \end{aligned}$$

Sedangkan

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{|*G*|}{4^3} \\ &= \frac{4\cdot 2\cdot 4}{4^3} \\ &= \frac{32}{64} \end{aligned}$$

Maka,

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{23}{32}$$

Dengan demikian, nilai dari $a^2+b^2=529+1024=\boxed{1553}$.

13. Sebuah segitiga dikatakan *menawan* apabila salah satu besar sudutnya dua kali besar sudut lainnya. Diberikan sebuah segitiga *menawan* T dan salah satu sudut dari segitiga tersebut adalah 20°. Sudut terbesar yang mungkin dari segitiga T adalah….

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{150^\circ}$, tercapai ketika segitiganya memiliki sudut $(150^\circ, 20^\circ, 10^\circ)$.
Untuk buktikan bahwa tidak ada segitiga lain yang memiliki sudut yang lebih besar, kita tinjau $\triangle ABC$. WLOG $\angle A = 20^\circ$. Kita bagi 3 kasus secara simetri:

- WLOG $\angle B = 2\angle A$. Maka $\angle B = 40^\circ$, sehingga $\angle C = 120^\circ$.
- WLOG $\angle A = 2\angle B$. Maka $\angle B = 10^\circ$, sehingga $\angle C = 150^\circ$.
- WLOG $\angle B = 2\angle C$. Maka $\angle B + \angle C = 160^\circ$. Oleh karena itu, $\angle B = \frac{2}{3}\times 160^\circ = \frac{320}{3}^\circ$.

Mudah dilihat bahwa 150° merupakan sudut terbesar yang mungkin dari segala jenis segitiga menawan dengan sudut 20°.

14. Diberikan sebuah barisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ yang memenuhi persamaan dibawah ini

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{1}{a_n}, & \text{jika } n \text{ genap} \\ a_n + 1, & \text{jika } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

untuk setiap bilangan bulat $n \geq 1$. Jika $a_1 = 1$ dan $a_{2021} = \frac{p}{q}$ dengan $p, q \in \mathbb{Z}$ dan $(p, q) = 1$. Digit terakhir dari $p + q$ adalah….

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{3}$.

Klaim: $a_{2k-1} = \frac{F_{k-1}}{F_k}$ untuk setiap bilangan asli k dimana F_j merupakan suku fibbonaci ke j dengan $F_0 = F_1 = 1$.

Kita buktikan klaim dengan cara induksi pada k.

Untuk $k = 1$, $a_1 = \frac{F_0}{F_1} = \frac{1}{1} = 1$. (Benar)

Assumsikan untuk $k = t$ benar, kita tunjukan bahwa kasus $k = t + 1$ juga benar jika kasus $k = t$ benar.

Untuk $k = t + 1$,

$$\begin{aligned} a_{2t+1} &= \frac{1}{a_{2t}} = \frac{1}{a_{2t-1} + 1} \\ &= \frac{1}{\frac{F_{t-1}}{F_t} + 1} \\ &= \frac{F_t}{F_t + F_{t-1}} = \frac{F_t}{F_{t+1}} \end{aligned}$$

Induksi terbukti. Jadi, $a_{2021} = \frac{F_{1010}}{F_{1011}}$. Mengingat bahwa $FPB(F_k, F_{k-1}) = 1$ untuk setiap bilangan asli k, maka $p = F_{1010}, q = F_{1011}$. Sehingga, $p + q = F_{1012}$.

Digit terakhir dari F_{1012} dapat diperoleh dengan cara nguli. Dari hasil nguli, diperoleh $F_{n+60} \equiv F_n \pmod{10}$ untuk setiap n bilangan cacah. Sehingga, $F_{1012} \equiv F_{52} \equiv 3 \pmod{10}$. Jadi, digit terakhir dari F_{1012} adalah $\boxed{3}$. □

15. Banyaknya cara menyusun angka 1,2,...,8 pada masing-masing titik sudut dari sebuah kubus sehingga perkalian dari sembarang 2 titik sudut yang terletak pada rusuk yang sama bernilai genap adalah…. (Penyusunan yang diperoleh dari merotasikan kubus dianggap sebagai penysunan yang sama.)

Solusi. Untuk mencapai kondisi yang diinginkan oleh soal, setiap sisi dari kubus harus memiliki tepat 2 buah bilangan ganjil dan 2 buah bilangan genap. Dengan kata lain, setiap rusuk kubus harus memiliki bilangan dengan beda paritas (ganjil genap). Misalkan kita namai kubus tersebut kubus $ABCD.EFGH$. Karena penyusunan yang diperoleh dari merotasikan kubus dianggap sama, kita bisa meletakkan angka 1 pada titik A tanpa mengurangi keumuman. Maka, titik B, D, E, G harus diisi oleh bilangan genap dan C, F, H harus diisi oleh bilangan ganjil.

Banyaknya penyusunan 4 bilangan genap pada titik B, D, E, G ada sebanyak 4! cara. Banyaknya penyusunan 3 bilangan ganjil pada titik C, F, H ada sebanyak 3! cara. Akan tetapi, kita bisa memperoleh 3 susunan yang sama dengan cara merotasikan kubus dengan AH sebagai sumbu rotasinya. Jadi, terdapat $\frac{3!\cdot 4!}{3} = \boxed{48}$ cara penyusunan. □

16. Apabila terdapat k bilangan prima berbeda sehingga jumlah dari kuadrat bilangan-bilangan tersebut adalah 712, maka nilai dari k adalah….

Solusi

Perhatikan bahwa bilangan prima terbesar pastilah kurang dari $\sqrt{712} \approx 26,\ldots$, jadi bilangan prima terbesar yang mungkin adalah 23. Tinjau juga $p^2 \pmod{6, 8}$ untuk suatu bilangan prima p. Jika $p \geq 5$, maka $p^2 = 1 \pmod 6) = 1 \pmod 8$, pengecualian untuk $2^2 = 4 \pmod 6 = 4 \pmod 8$ dan $3^2 = 3 \pmod 6 = 1 \pmod 8$. Sedangkan $712 = 4 \pmod 6 = 0 \pmod 8$.

Ingat bahwa nilai dari k terbatas hingga 9, karena terdapat 9 bilangan prima yang tidak lebih dari 23. Misal S adalah himpunan k bilangan prima tersebut. Kita dapat membagi kasus seperti demikian.

- $2, 3 \notin S$. Karena kuadrat dari setiap bilangan prima ini bernilai $1 \pmod 6 = 1 \pmod 8$ maka $712 = k \pmod 6 = k \pmod 8$. Nilai k terkecil yang mungkin adalah 16, kontradiksi dengan $k \leq 9$.
- $2 \in S, 3 \notin S$. Dengan cara yang sama kita dapat $712 = (k-1) + 4 \pmod 6 = (k-1) + 4 \pmod 8$. Nilai k terkecil yang mungkin adalah 13, kontradiksi dengan $k \leq 9$.
- $3 \in S, 2 \notin S$. Dengan cara yang sama kita dapat $712 = (k-1) + 3 \pmod 6 = (k-1) + 1 \pmod 8 \Rightarrow 712 = k+2 \pmod 6 = k \pmod 8$. Nilai k terkecil yang mungkin adalah 8. Namun, ini berarti ketujuh prima yang tersisa adalah $5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$, yang jumlah kuadratnya adalah 1552, bukan 712.
- $2, 3 \in S$. Dengan cara yang sama kita dapat $712 = (k-2) + 4 + 3 \pmod 6 = (k-2) + 4 + 1 \pmod 8 \Rightarrow 712 = k + 5 \pmod 6 = k + 3 \pmod 8$. Nilai k terkecil yang mungkin adalah 5. Dan terdapat solusi yang memenuhi yaitu

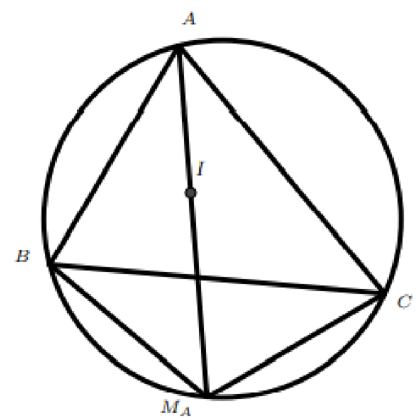
$$2^2 + 3^2 + 7^2 + 11^2 + 23^2 = 712$$

Dengan demikian, $k = \boxed{5}$.

17. Diberikan segitiga ABC dengan $AB = 13,\ BC = 14, CA = 15$ dan titik I sebagai titik pusat lingkaran dalam segitiga ABC. Didefinisikan $R_{\Delta PQR}$ sebagai jari-jari lingkaran luar segitiga PQR. Jika nilai dari $\frac{R_{\Delta ABI}}{AB} \cdot \frac{R_{\Delta BCI}}{BC} \cdot \frac{R_{\Delta CAI}}{CA}$ bisa dinyatakan sebagai pq dengan $p, q \in \mathbb{Z}$ dan $FPB(p, q) = 1$, maka nilai dari $p + q$ adalah….

Solusi. Jawabannya adalah $65 + 336 = \boxed{401}$.

Lemma: Pusat lingkaran luar $\triangle BCI$ adalah M_A dimana M_A merupakan perpotongan AI dengan lingkaran luar $\triangle ABC$ dengan $M_A \neq A$.
(Lemma ini sangat umum di geometri, pembuktian tidak akan ditulis di sini. Caranya untuk membuktikan lemma ini dengan angle chasing untuk menunjukan $M_A B = M_A C = M_A I$.)



Dengan menggunakan lemma di atas, kita bisa peroleh bahwa

$$\frac{R_{\triangle BCI}}{BC} = \frac{1}{2\cos \angle M_A BC} = \frac{1}{2\cos\left(90^\circ - \frac{\angle BM_AC}{2}\right)} = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\angle BAC}{2}\right)}$$

Dengan cara yang serupa, diperoleh

$$\frac{R_{\triangle ABI}}{AB} = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\angle ACB}{2}\right)}$$
$$\frac{R_{\triangle CAI}}{CA} = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\angle CBA}{2}\right)}$$

Dengan aturan cos dan sifar $\cos 2x = 1 - 2\cos^2 x$, diperoleh

$$\cos\left(\frac{\angle BAC}{2}\right) = \sqrt{\frac{9}{13}}, \cos\left(\frac{\angle ACB}{2}\right) = \sqrt{\frac{4}{5}}, \cos\left(\frac{\angle CBA}{2}\right) = \sqrt{\frac{49}{65}}$$

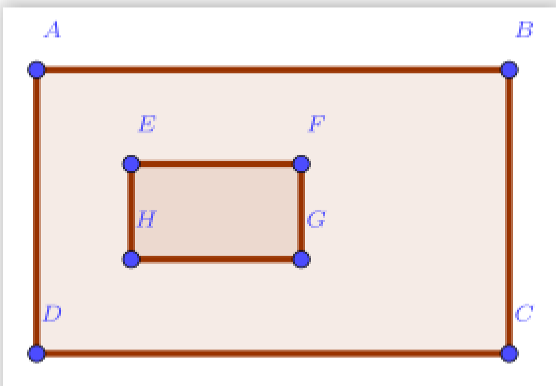
Sehingga, $\frac{R_{\triangle ABI}}{AB} \cdot \frac{R_{\triangle BCI}}{BC} \cdot \frac{R_{\triangle CAI}}{CA} = \frac{1}{8} \cdot \sqrt{\frac{13}{9}} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt{\frac{65}{49}} = \frac{65}{336}$. Jadi, jawabannya adalah $65+336 = \boxed{401}$. $\square$

18. Bilangan asli m dikatakan $lucu$ apabila terdapat bilangan asli berbeda a dan b sehingga $S(a^m) = S(b^m)$, dan $FPB(a,b) = 1$. Sebagai contoh, 3 $lucu$ karena $S(5^3) = S(125) = 8 = S(512) = S(8^3)$ dan $FPB(5,8) = 1$. Banyaknya bilangan asli $m \leq 2021$ yang lucu adalah….

Solusi.
Jawabannya adalah $\boxed{2021}$.
Kita akan buktikan semua bilangan asli lucu. Tinjau $(10^k + 1, 10^k + 10)$ untuk nilai k yang cukup besar. Perhatikan bahwa $FPB(10^k + 1, 10^k + 10) = FPB(10^k + 1, 10^{k-1} + 1) = FPB(10^{k-1} + 1, 9) = 1$. Namun untuk k yang cukup besar, dapat dilihat bahwa $s((10^k + 1)^n) = s((10^{k-1} + 1)^n)$ untuk suatu bilangan asli n.

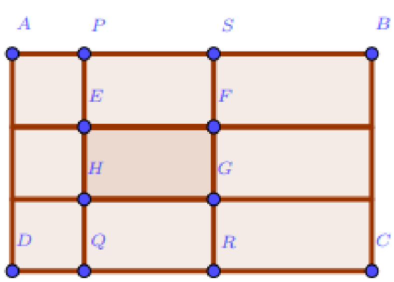
Catatan: Kita definisikan $S(n)$ sebagai jumlah digit-digit dari n.

19. Misalkan ABCD adalah suatu persegi panjang dan EFGH juga persegi panjang yang terletak di dalam ABCD seperti gambar di bawah.



Apabila panjang AE,DH,CG berturut-turut adalah 1,4,8, maka panjang dari BF adalah….

Solusi



Perhatikan bahwa $AE^2 + CG^2 = AP^2 + PE^2 + GR^2 + RC^2 = DQ^2 + FS^2 + QH^2 + BS^2 = BF^2 + DH^2$.
Jadi, $BF = \sqrt{AE^2 + CG^2 - DH^2} = \sqrt{64 + 1 - 16} = \boxed{7}$.

20. Bilangan real terkecil a sehingga $x^6 + 2x^5 - 3x^4 + ax^3 + 2x^2 + 4x + 1 \geq 0$ untuk sembarang bilangan real positif x adalah….

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{a = -6}$.
Tinjau bahwa

$$x^6 + 2x^5 - 3x^4 + ax^3 + 2x^2 + 4x + 1 = (x^3 + x^2 - 2x - 1)^2 + (a + 6)x^3$$

Saya klaim bahwa $P(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ memiliki akar real. Namun ini jelas sebab $P(0) = -1$ dan $P(2) = 7$. Jadi, $P(x)$ ada akar di interval $(0, 2)$ dari **Teorema Nilai Antara**.
Untuk sembarang $a < -6$, ambil akar positif x_0 dari $x^3 + x^2 - 2x - 1$. Maka, dari syarat soal, kita dapatkan $(a + 6)x_0^3 \geq 0$, dan karena itu $a + 6 \geq 0$, yang merupakan sebuah kontradiksi.