Modul Soal dan Pembahasan
IRC 2022
Wardaya College

Paket Barat

Seri
-OLIMPIADE MATEMATIKA-

Wardaya College

Editor :
Yose Rizal, S.Mat
May 23, 2022

1. Banyaknya cara membagikan 4 apel ke 3 orang penumpang sehingga setiap penumpang setidaknya mendapatkan 1 apel (tidak semua apel harus dibagikan) adalah

   Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{4}$. Karena ada 3 penumpang, maka akan ada setidaknya 3 apel yang dibagikan. Apabila ada tepat 3 apel yang dibagikan, maka ada 1 cara untuk me -lakukannya, karena semua orang mendapatkan jumlah apel yang sama, yaitu 1. Apabila dibagikan 4 apel, maka ada tepat 1 penumpang yang mendapatkan 2 apel. Ada $\binom{3}{1} = 3$ cara untuk memilih penumpang yang mendapatkan 2 apel. Kedua penumpang sisanya akan memiliki 1 apel.

2. Diberikan bilangan riil positif x, y yang memenuhi $x + 2y = 12$. Tentukan nilai maksimal dari $y\sqrt{x}$.

   Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{8}$. Dari AM-GM, kita punya

   $$(y\sqrt{x})^2 = xy^2 \leq \frac{(x+y+y)^3}{27} = 64$$

   Kesamaan jelas terjadi ketika $x = y = 4$.

3. Tentukan luas sebuah segienam reguler yang memiliki keliling 12 cm.

   Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{6\sqrt{3}}$. Tinjau bahwa segienam tersebut memiliki panjang sisi 2 cm. Akibatnya, luas segienam tersebut adalah $\frac{3}{2} \cdot 2^2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

4. Tentukan banyaknya bilangan asli $n < 100$ sehingga $100! + n$ prima.

   Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{0}$. Jelas bahwa untuk sembarang $2 \leq k \leq 99$, maka $100! + k$ habis dibagi $k > 1$ dan $100! + k > k$. Maka, $100! + k$ bukan prima untuk $2 \leq k \leq 99$. Terlebih lagi, sebab 101 bilangan prima, dari Teorema Wilson, kita punya $100! + 1 \equiv 0 \pmod{101}$, dan $100! + 1 > 100 + 1 = 101$. Oleh karena itu, $100! + 1$ bukan prima.

5. Definisikan sebuah fungsi kuadrat $f(x) = x^2 + bx + c$ untuk suatu b, c riil. Apabila $f(1) = f(2) = m$ dan $f(3) = 4$. Tentukan nilai dari m.

   Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{2}$. Kita punya $f(1) = f(2) = m$. Maka $f(x) = (x-1)(x-2)+m$ sebab f monik. Namun, kita punya $4 = f(3) = (3-1)\cdot(3-2)+m$, sehingga $m = 2$.

6. Tentukan banyaknya fungsi $f : \mathbb{N} \to \{1, 2, \ldots, 10\}$ sehingga

   $$f(a+b) = \min\{f(a), f(b)\} \text{ untuk setiap } a, b \in \mathbb{N} \text{ yang berbeda.}$$

   Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{100}$.
   Kita akan buktikan bahwa $f(n) = \min\{f(1), f(2)\}$ untuk semua $n \geq 3$ dengan induksi.
   Untuk $n = 3$, hal ini jelas benar. Andai untuk $n \leq k$, hal ini benar. Maka

   $$f(k+1) = \min_a\{f(a), f(k+1-a)\} = \min\{f(1), f(2)\}$$

   Sehingga setiap fungsi unik dibentuk hanya dari $f(1)$ dan $f(2)$. Karena itu, kita cukup menghitung banyaknya kemungkinan untuk $f(1)$ dan $f(2)$.
   Maka, kita cukup menggunakan aturan perkalian tempat, sehingga ada $10 \times 10 = 100$ fungsi demikian.

Wardaya College

7. Diberikan sebuah persegi $ABCD$ dan P di dalam persegi sehingga

$$\frac{AP+BP}{CP+DP}=\frac{5}{4}$$

Tentukan nilai dari

$$\frac{AP-BP}{CP-DP}$$

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{-\frac{4}{5}}$. Tinjau bahwa

$$AP^2+CP^2=BP^2+DP^2 \implies AP^2-BP^2=-(CP^2-DP^2)$$

Dengan kata lain,

$$\frac{AP-BP}{CP-DP}\cdot\frac{AP+BP}{CP+DP}=-1$$

8. Misalkan a,b,c,d bilangan asli berbeda yang memenuhi

$$(a+1)(b+3)(c+9)(d+10)=4641$$

Tentukan nilai minimum dari $ab+cd$.

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{32}$. Tinjau bahwa $4641=3\times7\times13\times17$. Perhatikan bahwa $a+1,b+3,c+9,d+10>1$. Oleh karena itu,

$$\{a+1,b+3,c+9,d+10\}=\{3,7,13,17\}$$

Terlebih lagi, $b+3,c+9,d+10>3$. Maka $a=2$. Tinjau bahwa

$$\{c+9,d+10\}=\{13,17\}$$

karena kedua bilangan $c+9$ dan $d+10$ lebih dari 7. Namun ini menyebabkan $b+3=7$, $b=4$. Tapi kita dapatkan $c+9\neq13$ sebab $c\neq b$. Oleh karena itu, $c+9=17$ dan $d+10=13$. Kita dapatkan $a=2,b=4,c=8,d=3$ yang menyebabkan $ab+cd=32$ merupakan satu-satunya nilai yang mungkin.

9. Diberikan sebuah bilangan riil x positif yang memenuhi

$$x+\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}+3$$

Tentukan nilai dari $x^2-7x-\frac{1}{x}$.

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{-11}$. Kita punya

$$x-3=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$(x-3)^2=x+\frac{1}{x}-2.$$

$$x^2-7x-\frac{1}{x}=-11$$

Wardaya College

10. Misal $ABCD$ adlaah segiempat konveks yang memenuhi $AC = BD, AB = BC$, $\angle ABD = 80^\circ$ dan $\angle CBD = 20^\circ$. Tentukan besar $\angle BCD$.

    Solusi. Konstruksi titik A' sehingga $BDCA'$ jajar genjang. Kita punya $\angle BCA' = \angle CBD = 20$, sehingga $\angle ACA' = \angle ACB + \angle BCA' = 60$. Terlebih lagi, $\triangle ACA'$ sama kaki sebab $CA = BD = CA'$. Maka $\triangle ACA'$ sama sisi. Karena B terletak pada garis sumbu AC, maka $\angle CA'B = 30 \Rightarrow \angle A'CD = 150$. Oleh karena itu, $\angle BCD = \angle A'CD - \angle A'CB = 150 - 20 = 130$

11. Untuk suatu bilangan asli n, kita definisikan $f(n) = 6n^4 + 11n^3 - 10n^2$. Tentukan hasil sisa bagi

    $$\prod_{k=1}^{70} f(k)$$

    oleh 20099.

    Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{0}$. Tinjau bahwa $20099 = 101 \times 199$, dan $f(n) = n^2(2n+5)(3n-2)$. Akan dibuktikan bahwa a dan b sehingga $1 \leq a, b \leq 70$ serta $101 \mid f(a)$ dan $199 \mid f(b)$. Namun, cukup ambil saja $b = 67$ dan $a = 48$.

12. Misal x, y, z bilangan real nonnegatif yang memenuhi persamaan

    $$54(x+y+z)(y+z)z = (z+5)^3$$

    Tentukan nilai minimum dari $x + y^2 + z^3$.

    Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{2}$ yang tercapai apabila $(x, y, z) = (0, 1, 1)$.
    Perhatikan bahwa dari AM-GM, kita punya $y^2 + 1 \geq 2y$ dan $z^3 + 2 = z^3 + 1 + 1 \geq 3z$.
    Karena itu, kita punya

    $$\begin{aligned} x + y^2 + z^3 &= x + (y^2+1) + (z^3+2) - 3 \\ &\geq x + 2y + 3z - 3 \\ &= ((x+y+z) + (y+z) + 2z) - 3 - z \\ &\geq 3\sqrt[3]{2(x+y+z)(y+z)z} - z - 3 \\ &= 3\sqrt[3]{\frac{(z+5)^3}{27}} - z - 3 \\ &= z + 5 - z - 3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

13. Banyak bilangan asli maksimum yang dapat diambil dari himpunan $\{1, 2, \ldots, 40\}$ sehingga tidak ada dua bilangan a, b yang diambil sehingga $a + b$ prima adalah

    Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{20}$, yang dapat dicapai dengan mengambil $\{2, 4, \ldots, 40\}$: himpunan bilangan genap yang tak lebih dari 40. Untuk buktikan bahwa untuk sembarang 21 bilangan dari $\{1, 2, \ldots, 40\}$ selalu ada 2 bilangan dengan jumlah bilangan prima. Ambil $\{x, 41 - x\}$ untuk semua bilangan x. Dari PHP, akan ada dua bilangan dengan jumlah 41.

Wardaya College

14. Misal ABC adalah segitiga sama sisi dengan panjang sisi 8 dengan lingkaran luar Γ. Titik P ada di busur AC sehingga $AP \cdot PC = 12$. Tentukan panjang BP.

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{\sqrt{76}}$. Dalil cosinus di $\triangle APB$ dan $\triangle BPC$ berikan

$$64 = AP^2 + PC^2 + AP \cdot PC$$

Karena $AP \cdot CP = 12$, maka $AP^2 + PC^2 = 52$. Terlebih lagi, kita punya $AP + CP = BP$ karena $\triangle ABC$ sama sisi dengan Dalil Ptolemy. Maka,

$$BP = AP + CP = \sqrt{AP^2 + CP^2 + 2 \cdot AP \cdot CP} = \sqrt{52 + 2 \cdot 12} = \sqrt{76}$$

15. Diberikan bilangan asli berbeda a dan b sehingga

$$(a - \varphi(b))(b - \varphi(a)) = 9$$

Tentukan nilai $a + b$ terkecil yang mungkin.

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{24}$, tercapai ketika $(a, b) = (15, 9)$. Pertama, tinjau bahwa apabila a atau b bernilai 1, WLOG $a = 1$, maka $1 - \varphi(b) \leq 0$ dan $b - 1 \geq 0$, sehingga $(a - \varphi(b))(b - \varphi(a)) \leq 0$, kontradiksi. Akibatnya, $a, b > 1$. Apabila ada a atau b yang bernilai 2, maka

$$(2 - \varphi(b))(b - 1) > 0$$

Sebab $b - 1 > 0$, maka kita harus punya $\varphi(b) \leq 1$, dengan kata lain $b \in \{1, 2\}$. Namun ini menyebabkan $(2 - \varphi(b))(b - 1) \leq 1$. Oleh karena itu, kita punya $a, b \geq 3$. Maka $\varphi(a), \varphi(b)$ genap. Tinjau modulo 2, kita punya

$$ab \equiv (a - \varphi(b))(b - \varphi(a)) \equiv 1 \pmod 2$$

Oleh karena itu, a dan b ganjil. Karena kita punya $a > \varphi(b)$ dan $b > \varphi(a)$. Kita punya $a - \varphi(b) \geq 1$ dan $b - \varphi(a) \geq 1$. Andai salah satu dari mereka bernilai 1. WLOG $a - \varphi(b) = 1$. Maka $b - \varphi(a) = 9$. Dengan kata lain, $b \geq 9 + 2 = 11$. Namun apabila $b = 11$, maka $a = \varphi(b) + 1 = 11$, dan $\varphi(a) \neq 2$. Apabila $b = 13$, maka $a = 13$, dan $\varphi(a) \neq 4$. Akhirnya apabila $b = 15$, maka $a = 9$. Sekarang, andai $b \geq 17$, maka apabila ada pasangan (a, b) sehingga $a + b < 24$, maka $a + b \leq 22$, yang menyebabkan $a \leq 5$. Namun, cukup mudah dicek bahwa $a = 3$ dan $a = 5$ tidak memenuhi.

Sekarang, andaikan $a - \varphi(b) = b - \varphi(a) = 3$. Kita punya

$$b = \varphi(a) + 3 < a + 3$$

dan $a < b + 3$. Dengan kata lain. $-2 \leq a - b \leq 2$. Karena a dan b paritasnya sama, kita simpulkan $|a - b| = 2$. WLOG $a > b$. Maka $a = b + 2$. Namun, ini artiniya

$$b - \varphi(b) = 1$$

Tinjau bahwa $\varphi(b) = b - 1$ artinya adalah semua bilangan lebih kecil dari $b \geq 3$ akan relatif prima dengan b, namun ini artinya b merupakan bilangan prima. Maka b prima. Kita cukup cek $b \in \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. Tapi kita punya $\varphi(b + 2) = b - 3$, dan tidak ada b yang memenuhi.

Wardaya College

16. Sebuah barisan $\{a_n\}_{n\geq 0}$ memenuhi rekursif

$$a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3}$$

untuk setiap bilangan bulat $n > 3$. Apabila $a_1 = 2$, $a_{20} = 22$ dan $a_{22} = 20$. Tentukan nilai dari a_{2022}.

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{-9}$. Tinjau $b_n = a_n - a_{n-1}$. Kita punya

$$a_n - a_{n-1} = (a_{n-1} - a_{n-2}) - (a_{n-2} - a_{n-3})$$

$$b_n = b_{n-1} - b_{n-2}$$

Dapat dilihat bahwa

$$a_{n+6} - a_n = b_n + b_{n+1} + b_{n+2} + b_{n+3} + b_{n+4} + b_{n+5} = 0$$

sebab $b_n = -b_{n-3}$ untuk setiap n. Akibatnya, $a_n = a_{n+6}$ untuk setiap n. Oleh karena itu, kita bisa extend persamaan di atas menjadi semua n bulat. Maka, $a_1 = 2, a_2 = 22, a_4 = 20$. Kita punya

$$a_4 = 2a_3 - 2a_2 + a_1$$

Dengan kata lain, $a_3 = 31$, dan

$$a_0 = a_3 - 2a_2 + 2a_1 = 31 - 2 \cdot 22 + 2 \cdot 2 = -9$$

Maka $a_{2022} = a_0 = -9$.

17. Seekor tikus yang sedang berada di titik A akan menelusuri sebuah kubus $ABCDEFGH$ dengan panjang sisi 1 meter. Tikus tersebut hanya dapat berpindah dari satu titik sudut ke titik sudut lainnya dengan melewati diagonal sisi salah satu sisi pada kubus. Sebagai contoh, apabila tikus memilih untuk melewati sisi $ABCD$ dan sedang berada di titik A, maka ia akan berakhir di titik C karena AC satu satunya diagonal sisi yang mulai dari A pada sisi ini. Selain titik A yang boleh ia kunjungi dua kali, tikus tidak boleh mengunjungi titik lain lebih dari sekali. Tentukan jarak perjalanan terjauh yang dapat dilakukan oleh tikus.

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{4\sqrt{2}}$ meter, yang dicapai dengan rute AH, HF, FE, EA. Tinjau bahwa pergantian titik sudut (1 kali jalan melewati diagonal sisi) akan menempuh jarak $\sqrt{2}$ meter. Cukup dibuktikan bahwa rute yang dipilih tikus hanya dapat melewati paling banyak 4 verteks. Untuk melihat ini, warnai titik sudut kubus dengan 2 warna sehingga tiap dua verteks pada rusuk kubus memiliki warna yang berbeda. Tinjau bahwa tiap dua verteks yang ada pada suatu diagonal sisi akan memiliki warna yang sama. Namun, ini berarti bahwa agar dua buah titik X dan Y dapat ada pada suatu rute, X dan Y harus memiliki warna titik yang sama. Namun, hanya ada 4 titik dengan warna putih dan hitam. Maka, akan ada maksimal 4 titik (termasuk A) yang dapat dilewati oleh semut.

Wardaya College

18. Definisikan sebuah fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dimana untuk sembarang bilangan $\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$, dimana $0 \le a_i < 9$ untuk setiap i, kita definisikan

$$f(\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}) = a_1^n + a_2^{n-1} + a_3^{n-2} + \cdots + a_n^1$$

Sebagai contohnya,

$$f(2021) = 2^4 + 0^3 + 2^2 + 1^1 = 21$$

Tentukan banyaknya bilangan asli $m \le 10^{12}$ yang memenuhi $f(m) = m$.

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{9}$, yaitu bilangan 1 sampai 9. Mudah dicek bahwa semua ini bekerja. Sekarang, andaikan panjang bilangan tersebut lebih dari 1, yakni $m \ge 10$, tinjau bahwa $a_i < 10$ untuk setiap i, dan $a_1 \ne 0$ dari definisi bilangan asli. Sehingga, kita punya

$$\begin{aligned} f(\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}) &= \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} \\ a_1^n + a_2^{n-1} + \cdots + a_n^1 &= 10^{n-1} a_1 + 10^{n-2} a_2 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Namun karena $a_i < 10$ untuk sembarang $0 \le i \le n-1$, maka

$$a_{i+1}^{n-i} < 10^{n-i-1} \cdot a_{i+1}$$

Sehingga apabila $m \ge 10$, maka $f(m) < m$.

19. Diberikan sebuah segitiga $\triangle ABC$ dengan jari-jari lingkaran luar R dan jari-jari lingkaran dalam r. Apabila $R + r = 100$. Tentukan nilai minimal yang mungkin dari $AH + BH + CH$ dimana H orthocenter segitiga $\triangle ABC$.

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{200}$. Tinjau bahwa

$$AH + BH + CH = 2R(\cos A + \cos B + \cos C) = 2R\left(1 + \frac{r}{R}\right) = 2r + 2R = 200$$

20. Tentukan bilangan asli terbesar yang membagi $n^5 + 3n^4 - n^3 - 3n^2$ untuk sembarang bilangan asli n.

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{12}$. Tinjau bahwa $f(n) = n^5 + 3n^4 - n^3 - 3n^2 = n^2(n+1)(n-1)(n+3)$. Tinjau bahwa $f(2) = 60$ dan $f(3)$ tidak habis dibagi 5. Maka bilangan yang dimaksud harus membagi 12. Akan dibuktikan bahwa $12 \mid f(n)$ untuk setiap bilangan asli n. Tinjau bahwa

$$f(n) = (n-1)n(n+1) \cdot n(n+3) = 6 \cdot \binom{n+1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{n(n+3)}{2}$$

Jelas bahwa $\binom{n+1}{3} \in \mathbb{Z}$ dan tinjau $\frac{n(n+3)}{2} = n + \binom{n+1}{2} \in \mathbb{Z}$.

Wardaya College

21. Dua buah bilangan asli a dan b dipilih secara acak dari himpuhnan $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$. Apabila $a < b$, maka Andi akan mendapatkan 0 poin. Apabila $a \geq b$, maka Andi akan mendapatkan $\binom{a}{b}$ poin. Tentukan frekuensi harapan nilai yang didapatkan oleh Andi.

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{\frac{1}{10000}(2^{101} - 102)}$. Peluang mendapatkan $a = b$ adalah $\frac{1}{100}$. Peluang untuk mendapatkan $a < b$ sama dengan peluang untuk mendapatkan $a > b$, yaitu $\frac{99}{200}$. Maka ekspektasi nilai adalah

$$\begin{aligned} \frac{1}{100} \cdot 1 + \frac{99}{200 \cdot \binom{100}{2}} \sum_{j=2}^{100} \sum_{i=1}^{j-1} \binom{j}{i} &= \frac{1}{100} + \frac{99}{200 \cdot \binom{100}{2}} \cdot \sum_{j=2}^{100} \cdot (2^j - 2) \\ &= \frac{1}{10000} \cdot \left(\sum_{j=1}^{100} (2^j - 1) \right) \\ &= \frac{1}{10000} \cdot ((2^{101} - 2) - 100) \end{aligned}$$

22. Misalkan a, b, c adalah bilangan riil positif yang memenuhi $abc = 1$ dan $\min(a, b, c) \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Tentukan bilangan rill positif terbesar k sehingga untuk sembarang a, b, c yang memenuhi kondisi di atas, maka

$$6 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq k(a + b + c) + \frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b}$$

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{k = 4}$. Pertama, jelas bahwa $k \leq 4$ karena $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ berikan $k \leq 4$. Kita cukup buktikan bahwa ketaksamaan di atas benar untuk $k = 4$. Tinjau bahwa karena $\min(a, b, c) \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, maka $2\min(a, b, c)^3 - 1 \geq 0$. Karena $abc = 1$, kita simpulkan bahwa

$$2a^2 - bc, 2b^2 - ac, 2c^2 - ab \geq 0$$

Oleh karena itu, kita punya

$$\sum (2a^2 - bc)(a - b)^2 \geq 0$$

yang apabila disusun ulang, kita dapatkan

$$6 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 4(a + b + c) + \frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b}$$

23. Sebuah bilangan asli n dikatakan *rakudai* apabila n tidak dapat dinyatakan sebagai jumlah finit buah kuadrat prima. Sebagai contoh, 13 **tidak** *rakudai* sebab $13 = 2^2 + 3^2$ dan 5 *rakudai* sebab 5 tidak bisa dinyatakan sebagai jumlah kuadrat prima. Tentukan bilangan asli terbesar yang rakudai.

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{23}$. Pertama, semua bilangan asli lebih besar dari 23 dapat direpresentasikan dalam bentuk $4a + 9b$ untuk suatu bilangan cacah a, b dari Teorema Frobenius. Sekarang, dari Teorema Frobenius, tidak ada cacah a, b sehingga $4a + 9b = 23$. Terlebih lagi, apabila 23 dinyatakan dalam jumlah bilangan kuadrat, maka bilangan kuadrat yang digunakan harus lebih kecil dari $23 < 25 = 5^2$, maka 23 *rakudai.*

Wardaya College

24. Di sebuah segitiga ABC dengan $AB < AC$. Misal H orthocenter dan O circumcenter $\triangle ABC$. Apabila titik tengah OH terletak pada BC, $BC = 1$, dan keliling ABC adalah 6, tentukan luas segitiga ABC.

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{\frac{6}{7}}$. Karena nine-point center $\frac{a+b+c}{2}$, b, and c kolinear. Maka, kita dapat a, $b-c$, $c-b$ are collinear. Dengan kata lain, $AO \parallel BC$. Ambil $D = 2O - A$, maka $ABCD$ trapesium sama kaki dengan lingkaran luar Γ, lingkaran dengan diameter AD. Misal $AB = c$ dan $AC = b$, maka $AD = \sqrt{b^2+c^2}$. Dari Ptolemy di $ABCD$,

$$1 \cdot \sqrt{b^2+c^2} + b^2 = c^2,$$

Karena $b + c = 5$, kita punya

$$b^2 + c^2 = (c^2 - b^2)^2 = 25(b-c)^2.$$

Maka kita dapat $12b^2 - 25bc + 12c^2 = 0$. Karena $c < b$, maka $c = \frac{3}{4}b$, dan $b = \frac{15}{7}$, $c = \frac{20}{7}$. Dari Heron, luas segitiga yanng diminta adalah $\frac{6}{7}$.

25. Tentukan banyaknya bilangan cacah $k \leq 10000$ sehingga untuk sembarang 2021 buah bilangan bulat berbeda $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$, terdapat polinom P berkoefisien bulat dengan derajat tepat k yang memenuhi

$$\{P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_{2021})\} \text{ merupakan permutasi dari } \{x_1, x_2, \ldots, x_{2021}\}.$$

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{7981}$.
Pertama, kita akan konstruksi polinom demikian untuk $k = 1$ dan $k \geq 2021$.

- Apabila $k = 1$, ambil polinom $P(x) = x$. Jelas bahwa polinom ini memenuhi.
- Apabila $k \geq 2021$, ambil polinom

$$P(x) = x^{k-2021} \prod_{i=1}^{2021} (x - x_i) + x$$

  Jelas bahwa polinom $P(x)$ berkoefisien bulat, dan memenuhi $P(x_i) = x_i$ untuk $1 \leq i \leq 2021$, sehingga memenuhi persyaratan soal.

Kita akan buktikan tidak ada polinom demikian untuk $2 \leq k \leq 2020$.
Pertama, kita ambil 2021 bilangan x_i dengan algoritma sebagai berikut:

- Ambil $x_0, x_1 \in \mathbb{N}$.
- Untuk seterusnya, ambil $x_i \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $x_i > \max_{j<i} 2x_j - \min_{k<i} x_k$.

Tidak ada tiga indeks $1 \leq i < j < k \leq 2021$ sehingga $2x_j = x_i + x_k$. Lebih tepatnya, klaim ini membuktikan bahwa tidak ada tiga indeks $1 \leq i, j, k \leq 2021$ sehingga $2x_j = x_i + x_k$, namun dari algoritma kita, $x_i < x_j < x_k$, sehingga andai ada indeks demikian, maka haruslah $2x_j = x_i + x_k$. Namun, karena $k > j, i$, maka dari algoritma yang kita berikan, $x_k > \max_{\ell<k} 2x_\ell - \min_{\omega<k} x_\omega > 2x_j - x_i$, kontradiksi. Apabila $\{P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_{2021})\}$

Wardaya College

merupakan permutasi dari $\{x_1, x_2, \ldots, x_{2021}\}$ untuk x_i yang ada pada algoritma sebelumnya, maka $P(x_i) = x_i$ untuk semua $1 \leq i \leq 2021$. Pertama, kita akan gunakan fakta bahwa apabila $P \in \mathbb{Z}[x]$, maka $a - b \mid P(a) - P(b)$ untuk sembarang dua bilangan bulat a dan b.
Karena $P : \{x_1, x_2, \ldots, x_{2021}\} \to \{P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_{2021})\}$ bertindak sebagai permutasi, maka untuk setiap i, terdapat bilangan asli n sehingga $P^n(x_i) = x_i$.
Sekarang, apabila $a_1, a_2, \ldots, a_k$ merupakan orbit periode dari P, dengan kata lain memenuhi $P(a_i) = a_{i+1}$ untuk $1 \leq i \leq k$, dan $a_{k+1} = a_1$, maka kita dapatkan

$$a_2 - a_1 \mid a_3 - a_2 \mid \cdots \mid a_1 - a_k \mid a_1 - a_2$$

Sehingga, kita dapatkan $|a_2 - a_1| = |a_3 - a_2|$. Namun, dari algoritma, kita karena $a_1, a_2, a_3 \in \{x_1, \ldots, x_{2021}\}$, kita tidak mungkin punya $a_1 + a_3 = 2a_2$, dan oleh karena itu, kita punya $a_1 = a_3$.
Sehingga, periode dari P haruslah 1 atau 2.
Andai ada suku x_i dengan periode P nya 2. Karena $2021 \equiv 1 \pmod 2$, maka akan ada setidaknya 1 buah elemen x_k dengan periode P nya 1. Misalkan ini sebagai x_j, dan definisikan $P(x_i) = x_k$. Maka

$$x_j - x_i \mid P(x_j) - P(x_i) = x_j - x_k \mid P(x_j) - P(x_k) = x_j - x_i$$

Maka, $|x_j - x_k| = |x_j - x_i|$, karena $x_i + x_k \neq 2x_j$, maka $x_k = x_i$, kontradiksi terhadap fakta x_i memiliki periode 2.
Maka, untuk semua suku x_i, kita punya $P(x_i) = x_i$. Klaim kita terbukti. Sekarang, andai ada polinom P dengan derajat k sehingga $P(x_i) = x_i$ untuk $\leq i \leq 2021$.
Tinjau polinom $Q(x) = P(x) - x$. Karena $k \geq 2$, maka polinom Q memiliki derajat $k \leq 2020$, namun $Q(x_i) = x_i$ untuk $1 \leq i \leq 2021$, dengan kata lain x_i, $1 \leq i \leq 2021$, merupakan akar dari polinom Q, sehingga polinom Q memiliki derajat setidaknya 2021, kontradiksi terhadap fakta $k \leq 2020$.

Wardaya College