

**Modul Soal dan Kunci Jawaban
IRC 2022
Wardaya College**

Paket Timur

**Seri
-OLIMPIADE MATEMATIKA-**

Editor :
Yose Rizal, S.Mat
May 23, 2022

1. Misalkan $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2021}{2022}$. Bilangan bulat terbesar yang kurang dari $130S$ adalah

Jawab : $\boxed{2}$

2. Misalkan $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ merupakan suatu suku banyak dengan a , b dan c merupakan bilangan bulat berbeda. Jika diketahui $p(a) = a^3$ dan $p(b) = b^3$, maka tentukan nilai dari $p(0)$ adalah

Jawab : $\boxed{16}$

3. Misalkan x , y dan z merupakan bilangan real yang memenuhi

$$\begin{cases} x^2 = 2z - 5 \\ y^2 = 3x + 1 \\ z^2 = 8y - 7 \end{cases}$$

Nilai dari xyz adalah

Jawab : $\boxed{6}$

4. Bilangan real terbesar k sedemikian hingga

$$(a + b)^3 \geq ka^2b$$

untuk setiap bilangan real positif a dan b adalah

Jawab : $\boxed{\frac{27}{4}}$

5. Misalkan a , b , c dan d merupakan bilangan real dengan $1 \leq a, b, c, d \leq 2$. Nilai terbesar dari

$$(a + b + c + d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)$$

adalah

Jawab : $\boxed{18}$

6. Misalkan untuk setiap bilangan real x , $[x]$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih dari x . Bilangan asli terbesar $n < 2022$ sedemikian hingga persamaan $x[x[x]] = n$ memiliki solusi real x adalah

Jawab : $\boxed{2014}$

7. Misalkan f merupakan fungsi yang memenuhi persamaan

$$f(xy) - f(x)f(y) = x + y \quad \text{untuk setiap } x, y \in \mathbb{R}$$

Nilai dari $f(2022)$ adalah

Jawab : $\boxed{-2021}$

8. Tentukan banyaknya kuadrupel bilangan bulat terurut (a, b, c, d) dengan $d \leq 2022$ yang memenuhi persamaan

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2^d$$

adalah

Jawab : $\boxed{18204}$

9. Bilangan bulat terbesar n yang tidak dapat dinyatakan sebagai $n = 20a + 21b + 22c$ dengan a, b dan c merupakan bilangan bulat tak negatif adalah

Jawab : 199

10. Diberikan suatu barisan dengan $a_1 = 1$ dan

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{jika } a_n \text{ genap} \\ \frac{1}{2}(a_n + 113) & \text{jika } a_n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Nilai dari a_{2022} adalah

Jawab : 53

11. Misalkan untuk setiap bilangan real x , $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih dari x . Misalkan S merupakan himpunan semua nilai $\left\lfloor \frac{2022}{n} \right\rfloor$ dengan n merupakan bilangan asli. Banyaknya bilangan bulat berbeda yang merupakan anggota dari S adalah

Jawab : 89

12. Suatu bilangan asli empat digit merupakan bilangan *baik* apabila digit-digitnya dapat dibagi menjadi dua kelompok di mana jumlah digit-digit pada dua kelompok tersebut adalah sama. Sebagai contoh, 3658 merupakan bilangan *baik* karena $3 + 8 = 6 + 5$. Bilangan asli empat digit terkecil N yang memenuhi N dan $N + 1$ merupakan bilangan *baik* adalah

Jawab : 1449

13. Diketahui bahwa $\frac{4771}{10000} < \log 3 < \frac{4772}{10000}$, dengan $\log x$ menyatakan fungsi logaritma dalam basis 10. Banyaknya bilangan asli n dengan $n \leq 2022$ sedemikian hingga digit pertama dari bilangan 9^n (ditulis dalam basis 10) adalah 9 adalah

Jawab : 93

14.

15. Misalkan A merupakan himpunan bagian dari $\{2, 3, 4, \dots, 2022\}$ yang memenuhi

- A tidak mengandung bilangan prima, dan
- setiap dua anggota berbeda A merupakan pasangan bilangan yang relatif prima.

Banyaknya anggota himpunan A paling banyak yang mungkin adalah

Jawab : 14

16. Sebuah dadu seimbang bersisi empat dilempar secara berulang. Misalkan N menyatakan banyaknya lemparan yang dibutuhkan sehingga setiap sisi dari keempat sisi dadu tersebut muncul paling sedikit satu kali. Nilai ekspektasi dari N adalah

Jawab : $\frac{25}{3}$

17. Suatu pertemuan dihadiri oleh 100 orang. Sebanyak k pasangan di antaranya saling kenal. Diketahui bahwa tidak terdapat tiga orang di antara 100 orang tersebut di mana setiap dua orang di antaranya saling kenal. Nilai terbesar k yang mungkin adalah

Jawab : 2500

18. Suatu kelas diikuti oleh 8 siswa. Seorang guru hendak membentuk dua kelompok dengan syarat sebagai berikut.

- setiap kelompok memiliki paling sedikit satu siswa,
- setiap siswa merupakan anggota dari paling banyak satu kelompok, tetapi tidak semua siswa harus merupakan anggota dari suatu kelompok.

Banyaknya cara membentuk dua kelompok tersebut adalah

Jawab : $\boxed{3025}$

19. Banyaknya tripel terurut (a, b, c) dengan a, b, c merupakan anggota berbeda dari himpunan $\{1, 2, 3, \dots, 50\}$ sedemikian hingga $ab + c$ habis dibagi 3 adalah

Jawab : $\boxed{16200}$

20. Diberikan persegi $ABCD$ dengan panjang sisi 1 satuan. Titik E terletak pada segmen AB sehingga $AE = a$. Dinotasikan r sebagai jari-jari lingkaran dalam dari segitiga CDE . Misalkan untuk $0 \leq a \leq 1$, nilai maksimum dan minimum dari r adalah M dan m berturut-turut. Nilai dari $4M + m$ adalah

Jawab : $\boxed{\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{2}}$

21. Diberikan segibanyak $A_1A_2A_3 \dots A_7$ yang dikonstruksi dengan cara sebagai berikut.

- Pertama-tama, konstruksi sebarang titik O_1 pada sebuah bidang.
- Konstruksi titik A_1 dan A_2 dimana $\angle A_1O_1A_2 = 60 \text{ deg}$ dan $O_1A_1 = O_1A_2 = 1$.
- Kemudian, titik O_2 terletak pada perpanjangan garis A_2O_1 sehingga O_2 terletak di luar segmen A_2O_1 dengan $O_1O_2 = 1$.
- Lakukan hal yang sama untuk titik-titik $A_3, O_3, A_4, O_4, A_5, O_5, A_6, O_6, A_7$ dengan ketentuan berikut.
 - $\angle A_iO_iA_{i+1} = 60 \text{ deg}$ dan $O_iA_i = O_iA_{i+1} = i$, untuk setiap $i = 2, 3, 4, 5, 6$, sehingga titik A_{i+1} dan A_{i-1} terletak pada sisi yang berbeda terhadap garis OA_i .
 - untuk setiap $i = 2, 3, 4, 5$ titik O_{i+1} terletak pada perpanjangan garis $A_{i+1}O_i$ sehingga O_{i+1} terletak di luar segmen $A_{i+1}O_i$ dan $O_iO_{i+1} = 1$.
- Terakhir, tarik ruas garis yang menghubungkan A_7 dan A_1 .

Luas segibanyak $A_1A_2A_3 \dots A_7$ adalah

Jawab : $\boxed{\frac{97}{4}\sqrt{3}}$

22. Misalkan $ABCD$ merupakan jajar genjang dengan $AB = 8$, $AC = 6$ dan $\angle BAC < 90 \text{ deg}$. Luas jajar genjang $ABCD$ adalah $16\sqrt{3}$. Pada sisi AB dan BC , dibentuk segitiga sama sisi ABE dan BCF berturut-turut dengan kedua segitiga tersebut berada di luar jajar genjang $ABCD$. Luas segitiga DEF adalah

Jawab : $\boxed{37\sqrt{3} - 12\sqrt{2}}$

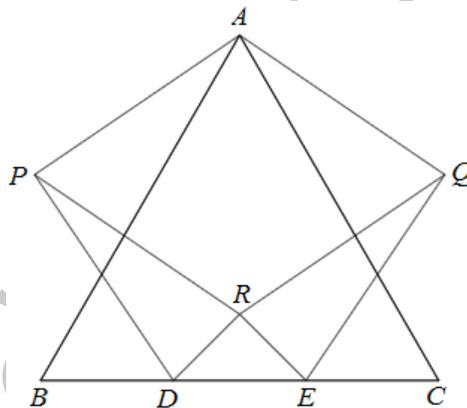
23. Diberikan sebuah segitiga ABC dengan $AB = 120$, $BC = 112$ dan $CA = 104$. Garis AD dan AE merupakan garis bagi dalam dan garis bagi luar dari $\angle BAC$ berturut-turut. Titik O dan O_1 masing-masing merupakan pusat lingkaran luar dari segitiga ABC dan segitiga ADE berturut-turut. Lingkaran luar dari segitiga ABC dan segitiga ADE berpotongan di titik A dan F . Luas segiempat AFO_1 adalah

Jawab : $\boxed{325350}$

24. Misalkan titik M merupakan sebarang titik pada segmen AB dengan $AB = 10$. Pada segmen AM dan BM , dibentuk persegi $ACDM$ dan $BEFM$ berturut-turut dengan titik-titik C , D , E dan F berada pada sisi yang sama terhadap garis AB . Misalkan lingkaran luar persegi $ACDM$ dan lingkaran luar persegi $BEFM$ berpotongan pada titik M dan N . Misalkan kurva L merupakan lokus titik N untuk setiap pemilihan titik M pada ruas garis AB . Panjang kurva L adalah

Jawab : $\boxed{5\pi}$

25. Pada gambar berikut, ABC merupakan segitiga sama sisi. Titik D dan E berada pada sisi BC sedemikian hingga $BD = DE = EC$. Diketahui bahwa $AP = AQ = PR = QR = PD = QE = 1$. Jika r merupakan panjang ruas garis DR , maka nilai dari r^2 adalah



Jawab : $\boxed{\frac{1}{7}}$